Hertentamen Lineaire Algebra 2NA
Woensdag 2 februari 2022, 10.15-13.15

Voorzie elke opgave van duidelijk commentaar in de vorm van een berekening of redenering.

---

1. Gegeven is de kwadratische kromme $K \subset \mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2 = 1$$

a. Ga na dat K een ellips is. (6 pt)

b. Bepaal vergelijkingen van de hoofdassen (dus de symmetrieassen) van K. (De vergelijkingen moeten uiteraard in termen van x_1, x_2 worden gegeven.) (4 pt)

2. $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing om de as $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ over een hoek $\phi = \arccos(4/5)$ waarbij de draaiing tegen de klok is, gezien vanuit het punt $(1, 2, -1)$ kijkend in de richting van de oorsprong.

- Stel de standaardmatrix op van R. Je mag het antwoord schrijven als een product van hoogstens drie matrices. (8 pt)

3. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = 2x(t) + 2y(t)$$

met beginwaarden $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

- Bepaal de oplossing van het stelsel met behulp van de e-macht van een matrix. (10 pt)

4. Laat H de reële vectorruimte van complexe hermitese 2×2-matrices zijn met als inwendig product $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$.

a. Bepaal een orthonormale basis van H die een matrix van de vorm aI bevat (met $a \in \mathbb{R}$ en I de eenheidsmatrix). (5 pt)

Laat $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ zijn. Beschouw de lineaire afbeelding $S : H \to H$ die wordt gegeven door $S(A) = CAC$.

b. Bewijs dat S een orthogonale afbeelding is. (6 pt)

De afbeelding $P : H \to H$ wordt gegeven door $P = \frac{1}{2}(S + id_H)$ (waarbij id_H de identieke afbeelding op H is).

c. Bewijs dat P een projectie is. (3 pt)

d. Ga na of P ook een orthogonale projectie is. (3 pt)

5. Gegeven is de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & \frac{3}{2} & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat B positief-semidefiniet is. (4 pt)

b. Ga na of B ook positief-definiet is door een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ te bepalen zo, dat $\mathbf{x}^*B\mathbf{x} = 0$ en $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, of te bewijzen dat zo'n vector niet bestaat. (3 pt)