Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Donderdag 12 januari 2017, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 58 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 32 pt.

---

1. Bepaal de standaardmatrix van orthogonale projectie in $\mathbb{C}^3$ op de lineaire deelruimte

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 + ix_2 - x_3 = 0\}. \qquad \text{(6p)}$$

2. Beschouw de kwadratische kromme $K \subset \mathbb{R}^2$ met vergelijking $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2 = 0$.

a. Schrijf de vergelijking in hoofdassenvorm en toon aan dat K een hyperbool is. (8p)

b. Geef vergelijkingen van de hoofdassen van K. (4p)

c. Geef vergelijkingen van de asymptoten van K. (4p)

3. Laat $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ een orthonormaal rechtshandig[1] stelsel vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn en zij $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}.$$

Hierbij is $\langle\ ,\ \rangle$ het standaard-inwendig product op $\mathbb{R}^3$.

a. Toon aan dat T een orthogonale afbeelding is. (4p)

b. Bewijs dat T een draaispiegeling is en bepaal een eenheidsvector $\mathbf{n}$ die de draaiingsas opspant. Geef het antwoord in termen van de vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. (4p)

c. Bepaal de draaiingshoek gezien vanuit het punt met plaatsvector $\mathbf{n}$ (zie b), kijkend in de richting van de oorsprong. (4p)

De volgende opgaven staan op de ommezijde van dit vel.

---

[1] dus $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$

4. Beschouw de vectorruimte $P_4(\mathbb{C})$ van complexe polynomen van graad hoogstens 4. Beschouw de lineaire afbeelding $S : P_4(\mathbb{C}) \to P_4(\mathbb{C})$ gegeven door

$$S(p)(X) = \frac{p(X) - p(1) - p'(1)(X-1)}{(X-1)^2}.$$

Deze afbeelding is goed gedefinieerd en lineair, dit hoeft niet te worden aangetoond.

a. Bepaal een basis voor $\ker(S)$. (4p)

b. Bepaal een basis voor $\operatorname{im}(S)$. (4p)

c. Leg uit of S een projectie is. (2p)

5. Gegeven is de matrix $K = \begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat K positief-semidefiniet is en bepaal de matrix $\sqrt{K}$. (De matrix mag desgewenst worden geschreven als een product van maximaal drie matrices, dit product hoeft niet te worden uitgewerkt.) (8p)

b. Laat L een positief-semidefiniete $n \times n$-matrix zijn en $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ zo, dat $\mathbf{x}^* L \mathbf{x} = 0$. Bewijs dat $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (4p)

c. Geef een voorbeeld van een 3×3-matrix A en een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ zodanig dat $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \mathbf{0}$. (2p)