Tentamen lineaire algebra 2
13 januari 2017, 10:00 – 13:00
zalen 312,412,B2,B3,401

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Hint: Alle karakteristiek polynomen die je nodig zou kunnen hebben, hebben gehele nulpunten. Als dat niet het geval lijkt, dan heb je dus ergens een rekenfout gemaakt.

Opgave 1. (5 punten) Schrijf bovenaan de eerste pagina van je antwoorden je naam, je emailadres, je universiteit (Leiden of Delft) en je Leidse studentnummer.

Opgave 2. (10 punten) Beschouw de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de Jordannormaalvorm van A, inclusief de bijbehorende basistransformatie. Dat wil zeggen, geef een inverteerbare matrix Q en een matrix J in Jordannormaalvorm zodanig dat $A = QJQ^{-1}$.

Opgave 3. (8 punten) Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbf{R})$ de vectorruimte van 2×3 matrices. Zij $U \subset V$ de deelruimte van alle matrices $M \in V$ waarvoor de vector $(1,1,1)^\top$ in de kern zit, dat wil zeggen, U is de deelruimte van alle matrices $M \in V$ waarvoor de som van de kolommen gelijk is aan $(0,0)^\top$.

(a) Laat zien dat de afbeelding $b\colon V \times V \to \mathbf{R}$ gegeven door
$$b(A,B) = \mathrm{tr}(AB^\top)$$
een inproduct op V geeft.

(b) Wat is de dimensie van U?

(c) Geef een orthonormale basis voor U.

Opgaven 4,5,6 en 7 staan op de volgende pagina

Opgave 4. (9 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de dimensie van de kern van A gelijk is aan 1.

(b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

(c) Bepaal de rang en de signatuur van de bilineaire vorm $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeven door $(x, y) \mapsto y^\top Ax$.

Opgave 5. (6 punten) Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ een vlak dat het punt $(0,0,0)$ bevat. Zij $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de projectie-afbeelding op V. Laat zien dat π wordt gegeven door een symmetrische matrix.
[Herinnering: de lineaire afbeelding π stuurt een element $x \in \mathbf{R}^3$ naar het unieke element $v \in V$ waarvoor geldt dat $x - v$ loodrecht staat op alle elementen van V.]

Opgave 6. (7 punten) Gegeven zijn twee reële vectorruimtes V en W en een bilineaire vorm $\varphi\colon V \times W \to \mathbf{R}$. Zoals we hebben gezien in het dictaat en op college induceert φ twee lineaire afbeeldingen

$$\varphi_L\colon V \to W^* \qquad \text{en} \qquad \varphi_R\colon W \to V^*.$$

Op college en in het dictaat wordt ook de afbeelding $\alpha_V\colon V \to V^{**}$ gedefinieerd.

(a) Laat zien dat er geldt

$$\varphi_L = \varphi_R^\top \circ \alpha_V.$$

(b) Neem aan dat V eindig-dimensionaal is. Bewijs dat φ niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als φ_L of φ_R een isomorfisme is.

Opgave 7. (5 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte en zij $f\colon V \to V$ een diagonaliseerbare lineaire afbeelding. Bewijs dat voor elke deelruimte $U \subset V$ die f-invariant is, de beperking $f|_U\colon U \to U$ ook diagonaliseerbaar is.
[Herinnering: de "beperking" heet ook wel de "restrictie", en een deelruimte U is f-invariant als voor elke $u \in U$ geldt $f(u) \in U$.]