Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Dinsdag 14 maart 2017, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 51 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 28 pt.

---

1. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{C}^4$ met daarin de lineaire deelruimte W die wordt gedefinieerd door

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 + x_3 - x_4 = 0, \; x_1 + ix_2 - 2x_4 = 0\}.$$

(T staat voor transponeren.)

Bepaal een orthonormale basis van het orthogonaal complement $W^\perp$. (7p)

2. Beschouw de 3-dimensionale vectorruimte V met basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Verder zijn in V de volgende vectoren gedefinieerd:

$$a_1 = e_2, \; a_2 = e_2 + e_3, \; a_3 = e_1 - e_2$$

en

$$b_1 = e_1 + e_2 + e_3, \; b_2 = e_2 - 2e_3, \; b_3 = 2e_1 - e_3.$$

a. Bewijs dat $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ een basis van V is. (4p)

$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ is eveneens een basis van V (dit hoeft niet te worden aangetoond).

b. Bepaal de basistransformatiematrix $C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$. (5p)

$T : V \to V$ is de lineaire afbeelding gedefinieerd door

$$T(a_1) = b_1, \; T(a_2) = b_2, \; T(a_3) = b_3.$$

c. Bepaal de matrix $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ van T t.o.v. de basis $\mathcal{E}$. (5p)

Op de ommezijde van deze pagina staan nog meer opgaven.

3. Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op:

$$\begin{cases} x'(t) &= -x(t) &- &2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) &+ &3y(t) \end{cases}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 1$. (8p)

4. Beschouw de kwadratische vorm q op $\mathbb{R}^3$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

a. Bepaal het waardenbereik van q voor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. (6p)

b. Bepaal $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ zo, dat $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ en $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. (5p)

5. Op de vectorruimte $P_4(\mathbb{R})$ van reële polynomen van graad ≤ 4 wordt de afbeelding $D : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ gegeven door

$$D(p)(x) = (x-2)^2 p''(x).$$

Hierbij is p'' de tweede afgeleide van p. $D(p)$ is natuurlijk het beeld van p.

a. Toon aan dat D een lineaire afbeelding is. (3p)

b. Bepaal een basis van $\ker(D)$. (4p)

c. Bepaal een basis van $\mathrm{im}(D)$. (4p)