## Tentamen Lineaire Algebra 2NA

**Woensdag 2 november 2016, 13.45-15.45**

**Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 40 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 22 pt.**

---

1. Bepaal de kleinste-kwadratenoplossing van het overbepaalde stelsel

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(5p)}$$

2. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^2$. Met $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ geven we, zoals gebruikelijk, de standaardbasisvectoren aan. Op $\mathbb{R}^2$ wordt verder de vorm $[\ ,\ ]$ gedefinieerd door

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (waarbij $x_1, x_2, y_1, y_2$ de coördinaten van $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zijn t.o.v. de standaardbasis).

a. Bepaal een matrix $A$ zodanig dat $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. (2p)

b. Toon aan dat de vorm $[\ ,\ ]$ positief-definiet is. (4p)

c. Leg uit waarom de vorm $[\ ,\ ]$ een inwendig product op $\mathbb{R}^2$ is. (3p)

d. Bepaal een basis van $\mathbb{R}^2$ die t.a.v. het inproduct $[\ ,\ ]$ orthonormaal is. (6p)

e. Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{e}_2$ op het opspansel van $\mathbf{e}_1$ (waarbij de orthogonaliteit weer t.a.v. het inproduct $[\ ,\ ]$ is). (3p)

**Op de volgende bladzijde staat nog een opgave.**

3. $V$ is een tweedimensionale complexe vectorruimte met een inwendig product $\langle\ ,\ \rangle$. De elementen $a_1, a_2 \in V$ hebben de eigenschap dat

$$\langle a_1, a_1\rangle = \langle a_2, a_2\rangle = 1, \ \langle a_1, a_2\rangle = \tfrac{1}{2}i.$$

a. Toon aan dat $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ een basis van $V$ is. (4p)

De vectorruimte $\mathcal{L}(V)$ van lineaire afbeeldingen van $V$ naar $V$ (met de gewone optelling en scalaire vermenigvuldiging van afbeeldingen) heeft een (geordende) basis $\mathcal{T} = \{T_1^1, T_2^1, T_1^2, T_2^2\}$ waarbij de afbeeldingen $T_j^i$ gedefinieerd zijn door

$$T_j^i(a_k) = \delta_{ik} a_j$$

voor $i, j, k = 1, 2$, waarbij $\delta_{ik}$ het Kroneckersymbool voorstelt. (Als voorbeeld noemen we: $T_2^1(a_1) = a_2, T_2^1(a_2) = 0_V$.)

De afbeelding $S : V \to V$ wordt gegeven door

$$S(x) = \langle a_2, x\rangle a_1 - \langle a_1, x\rangle a_2.$$

b. Toon aan dat $S$ een lineaire afbeelding is. (3p)

c. Bepaal de coördinaatvector van $S$ t.o.v. de basis $\mathcal{T}$ (dus $S_\mathcal{T}$). (4p)

d. Bepaal de matrix van $S$ t.o.v. de basis $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ (dus $S_\mathcal{A}^\mathcal{A}$). (3p)

e. Bepaal $\ker(S)$ en $\operatorname{im}(S)$. (3p)