Antwoorden toets LA2na, nov. 2016.

1. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Dit stelsel kunnen we schrijven als $A\underline{x} = \underline{y}$ met $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. De kleinste-kwadratenoplossing is $\underline{x}_{kk} = (A^*A)^{-1}A^*\underline{y} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ dus

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

2a. $[\underline{x}, \underline{y}] = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

b. Aan te tonen: $[\underline{x}, \underline{x}] > 0$ als $\underline{x} \neq \underline{o}$ (dat $[\underline{o}, \underline{o}] = 0$ volgt direct): we proberen $[\underline{x}, \underline{x}]$ als som van kwadraten te schrijven:

$[\underline{x}, \underline{x}] = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0$

en gelijkheid geldt d.e.s.d. als $x_1 - x_2 = 0$ en $x_2 = 0$ dus alleen als $x_1 = x_2 = 0$ (dus $\underline{x} = \underline{o}$)

c. Bilineariteit volgt meteen uit de schrijfwijze $[\underline{x}, \underline{y}] = \underline{x}^T A \underline{y}$. Symmetrie volgt uit $A = A^T$ (of is ook direct in te zien); positief-definiete eigenschap volgt uit b.

d. Met Gram-Schmidt: laat $\underline{a}_1 = \underline{e}_1$, dan

$$\underline{a}_2 = \underline{e}_2 - \frac{[\underline{a}_1, \underline{e}_2]}{[\underline{a}_1, \underline{a}_1]}\underline{a}_1 = \underline{e}_2 - \frac{-2}{2}\underline{e}_1 = \underline{e}_2 + \underline{e}_1$$ en

$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ is een orthogonaal stelsel. Uit $[\underline{e}_1, \underline{e}_1] = 2$ en $[\underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2] = 2 - 2 - 2 + 5 = 3$ volgt dat $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_1, \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)\}$ een orthonormaal stelsel is.

e. De orthog. projectie wordt gegeven door.

$$\frac{[e_1,e_2]}{[e_1,e_1]}e_1 = -\,e_1.$$

3. We moeten aantonen dat $\{a_1,a_2\}$ l.o. zijn (een l.o. stelsel met n elementen is een basis van V als $\dim V = n$). Stel niet, dan is $a_2 = \lambda a_1$ voor zekere λ. Dan is $\frac{1}{2}i = \langle a_1,a_2\rangle = \lambda\langle a_1,a_1\rangle = \lambda$ maar $\langle a_2,a_2\rangle = |\lambda|^2\langle a_1,a_1\rangle = |\lambda|^2 = 1/4 \neq 1$. Dus $\{a_1,a_2\}$ inderdaad l.o. en dus een basis.

b. $S(x+y) = \langle a_2,x+y\rangle a_1 - \langle a_1,x+y\rangle a_2$
$= \langle a_2,x\rangle a_1 + \langle a_2,y\rangle a_1 - \langle a_1,x\rangle a_2 - \langle a_1,y\rangle a_2$
$= S(x) + S(y)$

$S(\lambda x) = \langle a_2,\lambda x\rangle a_1 - \langle a_1,\lambda x\rangle a_2$
$= \lambda(\langle a_2,x\rangle a_1 - \langle a_1,x\rangle a_2) = \lambda S(x).$

Dus S lineair.

c. $S(a_1) = -\frac{1}{2}ia_1 - a_2$, $S(a_2) = a_1 - \frac{1}{2}ia_2$.

duo $S = -\frac{1}{2}i\,T^1_1 - T^1_2 + T^2_1 - \frac{1}{2}i\,T^2_2$

$$S_T = \begin{pmatrix} -1/2\,i \\ -1 \\ 1 \\ -1/2\,i \end{pmatrix}$$

d. $$S^A_A = \begin{pmatrix} -1/2\,i & 1 \\ -1 & -1/2\,i \end{pmatrix}$$

e. De matrix S^A_A heeft rang 2 dus rang$(S) = 2$ en $\mathrm{im}(S) = V$ en $\ker(S) = \{0_V\}$.