Lin. Algebra 2 na.

1.a. De matrix van U tov de orthonormale basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ is $M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Deze matrix is unitair: $M^* M = I$ (laten zien), dus U is ook unitair (omdat de basis orthonormaal is, is M^* de matrix van U^*).

b. Kar. pol: $\lambda^2 - i$, nulp. $\lambda = \pm e^{\pi i/4}$
eigenvectoren $\begin{pmatrix} \mp e^{\pi i/4} \\ 1 \end{pmatrix}$; een orthonormale basis
$(-x_1 = \lambda x_2)$
van eigenvectoren is dus $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{\pi i/4} |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right), \right.$

$\left. \frac{1}{\sqrt{2}}\left(+e^{\pi i/4} |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) \right\}$ bij ew $+e^{\pi i/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
resp. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -e^{\pi i/4}$.

2.a. $\varphi(x_1, x_2) = \underline{x}^T A \underline{x}$ met $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

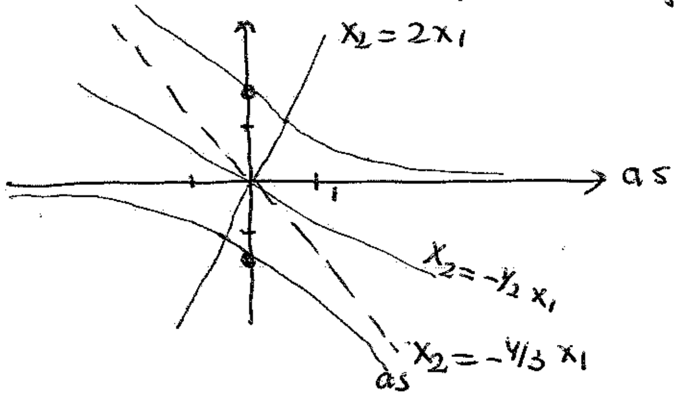
A is indefiniet (1 pos., 1 neg. e.w. ofwel $\det A < 0$)
dus $\varphi(\underline{x}) = 6$ is een hyperbool (omdat $6 \neq 0$)

b. De richtingen van de hoofdassen zijn de e.v. van A
dit zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (bij ew 4) en $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (bij ew -1)
dus de vergelijkingen zijn
$$x_2 = 2x_1 \quad \text{resp.} \quad -x_1 = 2x_2$$

c. De vergelijkingen volgen door $\varphi(\underline{x}) = 0$ te stellen.
Dit geeft $x_2 = 0$ of $x_2 = -4/3\, x_1$.
(Het kan ook via de transformatie:
$\varphi(x_1, x_2) = \underline{x}^T A \underline{x} = \underline{x}^T U D U^T \underline{x} = \underline{y}^T D \underline{y} = 4y_1^2 - y_2^2$
De asymptoten zijn $4y_1^2 - y_2^2 = 0$ dus
$y_2 = \pm 2y_1$. Nu is $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$y_1 = \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}}$, $y_2 = \frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}$: dit geeft $\begin{cases} - : & x_2 = 0 \\ + : & 3x_2 = -4x_1. \end{cases}$

2d. x_2-as : $(0, \pm\sqrt{2})$; x_1-as : geen.



3 a. Kar. polynoom x^2-6x+9 ; er is 1 e.w. $x=3$ met algeb. multipliciteit 2, de kern van $C-3I$ is $\text{Ker}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$, de meetk. multipliciteit is 1 en dus kleiner dan de algebraïsche $\rightarrow$ C niet diag.baar (of: er is geen basis van eigenvectoren).

b. De oplossing is $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{tC}\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = e^{t(3I+N)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$= e^{3t}\cdot e^{tN}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e^{3t}(I+tN)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix}1+4t & -2t\\ 8t & 1-4t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

waarbij $N = C-3I = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}$; $N^2=0$

$x(t) = e^{3t}\cdot -2t$, $y(t) = e^{3t}(1-4t)$.

4. Het matrixproduct is

$$R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\, R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\, C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$$ met $\mathcal{B}$ een orthonormale rechtsdraaiende basis die $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ omvat,

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ 0 & \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} \text{ en } C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \left(C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\right)^T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(is orthogonale matrix!)
met $\det C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = 1$.

(opm. elke orthogonale matrix $C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ waarvan $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$ een van de kolommen is en $\det C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} > 0$

---

voldoet; de 1 in $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ moet wel met de positie van de kolom waar $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} -\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$ staat (in $C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$) overeenstemmen!

5. a. P lineair is al gegeven, en moet worden aangetoond dat $P^2 = P$. Omdat $P(f)$ een constante functie is, is het voldoende om aan te tonen dat $P(c) = c$ voor c constant: $P(c) = \int_0^1 c\,dx = c$ inderdaad.

b. 2 manieren: (i) $\ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$ of (ii) $P = P^*$
manier (i): laat $f \in \ker P$ dus $\int_0^1 f(x)dx = 0$ en $g \in \operatorname{im} P$ dus g constant. Dan is
$\langle g, f\rangle = \int_0^1 \overline{g}\cdot f(x)dx = \overline{g}\int_0^1 f(x)dx = 0$. Dus P orthogonale projectie.
(ii): aantonen dat $\langle Pg, f\rangle = \langle g, Pf\rangle$ voor $g, f \in V$:

$$\langle Pg, f\rangle = \int_0^1 \overline{Pg(x)}f(x)dx = \int_0^1\int_0^1 \overline{g(y)}f(x)dy\,dx$$

$$\langle g, Pf\rangle = \int_0^1 \overline{g(x)}Pf(x)dx = \int_0^1\int_0^1 \overline{g(x)}f(y)\,dy\,dx$$

Beide integralen zijn gelijk.. dus P orthogonale projectie.

6. Laat $w \in W^{\perp}$. We moeten aantonen dat $T^*(w) \in W^{\perp}$, dus $\langle T^*(w), v\rangle = 0$ voor alle $v \in W$. Nu is $\langle T^*(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = 0$ omdat $T(v) \in W$. Klaar. $\square$