nov '13. LA 2 NA antwoorden

1a. $A^*A = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

dus A unitair

b. Kar. polynoom x^2+1, e.w. zijn $\pm i$

eigenvector bij e.w. i: $\frac{i}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3} = ix$ geeft $\lambda\begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{x}$

($\lambda \neq 0$), net zo is $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e.v. bij e.w. $-i$.

c. $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ diag. matrix van e.w.; de e.w. zijn orthogonaal dus er is een unitaire matrix van e.v. van A nl. $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{3} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2a. $\underline{x} \in W^\perp$ dan $x_1 + x_2 = 0$, $-ix_1 + x_3 + x_4 = 0$

oplossen geeft bv. $W^\perp = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b. Bepaal eerst een orthogonaal stelsel $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$

laat bv. $\underline{a} = \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan is $\underline{a}_2 = \underline{b} - \frac{\langle \underline{a}_1, \underline{b} \rangle}{\langle \underline{a}_1, \underline{a}_1 \rangle} \underline{a}_1$

$= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/2 \\ -i/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

normaliseren geeft $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} =: \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$

c. $P_W = \underline{b}_1\underline{b}_1^* + \underline{b}_2\underline{b}_2^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 1\ 0\ 0) + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}(-i\ i\ 2\ 2)$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & i & i \\ 2 & 3 & -i & -i \\ -i & i & 2 & 2 \\ -i & i & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d. $P_{W^\perp}(\underline{c}) = \underline{c} - P_W(\underline{c}) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/5\,i + 3/5 \\ 2/5\,i + 2/5 \\ -1/5\,i + 1/5 \\ -1/5\,i + 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5\,i - 3/5 \\ -2/5\,i + 3/5 \\ -4/5\,i - 1/5 \\ 1/5\,i - 1/5 \end{pmatrix}$

3a. Voor $p, q \in P_n$ is $T_n(p+q)(x) = (p+q)(x+1) - (p+q)(x)$

$= p(x+1) + q(x+1) - p(x) - q(x) = T_n(p)(x) + T_n(q)(x)$

voor $\lambda \in \mathbb{R}$ is $T_n(\lambda p)(x) = (\lambda p)(x+1) - (\lambda p)(x) = \lambda(p(x+1) - p(x))$

$= \lambda T_n(p)(x)$.

b. Als V, W vectorruimten (over hetzelfde lichaam K) zijn en $f: V \to W$ lineair, dan is

$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$.

c. $\mathrm{Ker}(T_n) = \{p \in P_n : T_n(p) = 0\} = \{p \in P_n : p(x) = p(x+1)\}$

$= \{p \in P_n : p \text{ constant}\}$. De kern bestaat uit de constante polynomen.

d. Uit de dimensiestelling volgt nu

$\dim \mathrm{Ker}(T_n) + \dim \mathrm{Im}(T_n) = \dim P_n$

dus $1 + \dim \mathrm{Im}(T_n) = n+1$

dus $\dim \mathrm{Im}(T_n) = n$.

$\mathrm{Im}(T_n)$ is een lineaire deelruimte van P_{n-1} en $\dim \mathrm{Im}(T_n) = \dim P_{n-1}$ dus $\mathrm{Im}(T_n) = P_{n-1}$,

T_n is dus surjectief.

e. $T_3(1) = 0$, $T_3(x) = 1$, $T_3(x^2) = 2x+1$, $T_3(x^3) = 3x^2+3x+1$

de matrix van T_3 tov de bases $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3\}$ en $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ is dus

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$