1a. Een basis van W is bv. $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\circ\circ$

Een orthogonale basis is bv. $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{a}_1, \underline{a}_2 \right\}$

6p. met $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}^* \begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix} - \dfrac{i}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-i/2\\i/2\\0\end{pmatrix}$ $\circ\circ$

Een orthonormale basis is $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-i\\i\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\circ\circ$

b. voor $\underline{x} \in W^\perp$ geldt: $x_1 - i x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0$ $\circ\circ$

4p dus een basis wordt gegeven door $\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\circ\circ$

c. De orthogonale projectie van $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$ op W is

$$\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}2\\i\\-i\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}2\\-i\\+i\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2} i \begin{pmatrix}2\\-i\\+i\\0\end{pmatrix}$$

4p

$$= \begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

2p 2a. $\langle \underline{e}_1 + \underline{e}_2, 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \rangle = 3.2 - 2\cdot -1 - 2\cdot 2 + 2 \cdot -1 = 2$

2p. b. $A = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

c. bilineariteit $\circ\ x^\tau A(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x^\tau A y_1 + \mu x^\tau A y_2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2)$

+1 Symmetrie. $\circ$(lin. in 1e component volgt uit symmetrie)

+1 $\circ\ \langle x, y\rangle = x^\tau A y = (x^\tau A y)^\tau = y^\tau A^\tau x = y^\tau A x = \langle y, x\rangle$

omdat A symmetrisch.

+4 $\circ\circ\circ\circ$

pos. definiet: $\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$

$= 2(x_2 - x_1)^2 + x_1^2 \geq 0$ en

7p. gelijkheid geldt d.e.s.d. als $x_1 = 0$ en $x_2 - x_1 = 0$ dus $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ (dus $\underline{x} = \underline{0}$)

3a. De meest directe manier gaat als volgt: stel voor zekere $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{C}$ geldt dat
$\lambda(X^3+X)+\mu(X^3-X)+\nu(X^2+X+1)+\xi\cdot 1 = 0$; dan is
$(\lambda+\mu)X^3 + \nu X^2 + (\lambda-\mu+\nu)X + (\nu+\xi) = 0$ dus
$\lambda+\mu=0$, $\nu=0$, $\lambda-\mu+\nu=0$, $\nu+\xi=0$. Uit $\nu=0$ volgt
3p. $\lambda+\mu=\lambda-\mu=0$ (dus $\lambda=\mu=0$) en $\xi=0$. Maar dan is het stelsel lin. onafhankelijk. (*) → zie onderaan pagina!

[Andere manieren zijn: aantonen dat de coordinaatvectoren t.o.v. de basis $\{X^3, X^2, X, 1\}$ lin. onafh. zijn door te laten zien dat de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is: (bv. determinant $\neq 0$)
ook mag de methode met de Wronskiaan worden gebruikt.]

3b. Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ en $p, q \in V$ is $T(\lambda p)(X) = \frac{1}{2}(\lambda p)''(1)(X-1)^2 + (\lambda p)(1)$
$= \lambda\{\frac{1}{2}p''(1)(X-1)^2 + p(1)\}$ en $T(p+q)(X) = \frac{1}{2}(p+q)''(1)(X-1)^2 +$
3p $(p+q)(1) = \frac{1}{2}p''(1)(X-1)^2 + \frac{1}{2}q''(1)(X-1)^2 + p(1) + q(1) = T(p)(X) + T(q)(X)$

3c. $T(1) = 1$, $T(X) = 1$, $T(X^2) = (X-1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$,
(3p) $T(X^3) = 3(X-1)^2 + 1 = 3X^2 - 6X + 4$; de matrix is dus
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3p)

3d. Uit 3c zien we dat een basis van de kolomruimte van de matrix is $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; dus is $\{1, (X-1)^2\}$ een basis van $\mathrm{im}(T)$. De nulruimte van de matrix is het opspansel
6p van (bijvoorbeeld) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; een basis van $\ker(T)$ is dus $\{X-1, (X-1)^3\}$

3e. Ik bekijk $T^2(1)$ en $T^2((X-1)^2)$: $T^2(1) = T(T(1)) = T(1)$ en $T^2((X-1)^2) = T(T(X-1)^2) = T((X-1)^2)$.
Omdat $X-1, (X-1)^3 \in \ker(T)$, is $T(X-1) = 0 = T^2(X-1)$ en $T((X-1)^3) = 0 = T^2((X-1)^3)$. Omdat $\{1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$ een basis van V is, geldt dat $T^2 = T$, dus T is een projectie omdat T tevens lineair is (zie b).

3a. (*) Maar dan is het stelsel een basis: een lin. onafh. stelsel dat
3p → evenveel vectoren als de dimensie ($=4$) bevat, is een basis