deeltentamen Lin. Algebra 2 NA 26.10.2012.

1. De vergelijking van de lijn zij $y = ax + b$.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Invullen van de punten levert het stelsel $A\underline{x} = \underline{y}$. De kleinste kwadratenoplossing is

$$\underline{x}_{KK} = (A^*A)^{-1}A^*\underline{y} \qquad A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dus $\underline{x}_{KK} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 7/3 \end{pmatrix}$.

De vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{3}$.

2a. $W = \text{span}\left\{\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Laat $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$.
We passen Gram Schmidt toe.

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \frac{\langle \underline{b}_1, \underline{a}_2 \rangle}{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle}\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Een orthonormale basis is $\left\{\frac{\underline{b}_1}{\|\underline{b}_1\|}, \frac{\underline{b}_2}{\|\underline{b}_2\|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

b. $\dim W^\perp = 1$ dus er is 1 basisvector. Deze vinden we door ~~hetzij~~ Gram Schmidt toe te passen, of door inproducten met $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ te nemen. Dit geeft voor de vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x - iy = 0 \\ -ix + z = 0 \end{cases}$. Een oplossing is $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

normaliseren geeft $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ voor de enige basisvector.

c. Zij $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ de matrix met als kolomvectoren de vectoren van de orthonormale basis van W. De projectiematrix is

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ i/3 & 2/3 & 1/3 \\ -i/3 & +1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

3 a. Aantonen dat $\tau(v+w)=\tau(v)+\tau(w)$ en $\tau(\lambda v)=\lambda\tau(v)$ voor $\lambda\in\mathbb{C}$; $v,w\in V$. Gebruik de eigenschappen van het inwendig product:
$\tau(v+w)= \langle a,v+w\rangle b = (\langle a,v\rangle + \langle a,w\rangle) b$
$= \langle a,v\rangle b + \langle a,w\rangle b = \tau(v)+\tau(w)$ (lineariteit in de 2^e component) en $\tau(\lambda v)= \langle a,\lambda v\rangle b = \lambda\langle a,v\rangle b = \lambda\tau(v)$. $\rightarrow$ Dus τ lineair.

b. $\tau(a)= \langle a,a\rangle b = b$, $\tau(b) = \langle a,b\rangle b = 0_V$;
de matrix is dus $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. 2 manieren: ① de eerste manier via de definitie:
$\langle v,\tau(w)\rangle = \langle \tau^* v, w\rangle$ voor alle $v,w\in V$.

$\langle v,\tau(w)\rangle = \langle v, \langle a,w\rangle b\rangle \overset{(i)}{=} \langle a,w\rangle\langle v,b\rangle$
$\overset{(ii)}{=} \langle \overline{\langle v,b\rangle} a, w\rangle \overset{(iii)}{=} \langle\langle b,v\rangle a, w\rangle = \langle \tau^*(v), w\rangle$
dus $\tau^*(v) = \langle b,v\rangle a$. Hierbij is gebruikt:
(i), lineariteit in de 2^e component; (ii) antilineariteit in de 1^e component, (iii) $\overline{\langle v,b\rangle} = \langle b,v\rangle$.

② de tweede manier: het volstaat om op te merken dat tov de orthonormale basis $\{a,b\}$ de matrix van τ^* de geadjungeerde van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ van τ is. De matrix van τ^* tov $\{a,b\}$ is dus $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; dit is ook de matrix van de afbeelding $v \rightarrow \langle b,v\rangle a$. Dus $\tau^*(v) = \langle b,v\rangle a$.

d. Er is een vectorruimte-isomorfisme tussen $\mathcal{L}(V)$ en de vectorruimte $\mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{C})$ dat wordt gedefinieerd door $\tau\in\mathcal{L}(V)$ af te beelden op de matrix van τ tov de basis $\{a,b\}$. Dan is $\dim\mathcal{L}(V) = \dim \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{C}) = 4$.

e. Aan te tonen dat $\langle S,S\rangle_{\mathcal{L}(V)} \geq 0$ voor alle S en $\langle S,S\rangle_{\mathcal{L}(V)} > 0$ als $S\neq 0$:
$\langle S,S\rangle_{\mathcal{L}(V)} = \langle Sa,Sa\rangle + \langle Sb,Sb\rangle \geq 0$ omdat het inproduct op V positief definiet is ($\langle v,v\rangle > 0$ voor alle $v\in V$, $v\neq 0$)
Omgekeerd, als $\langle S,S\rangle = 0$ dan is $\langle Sa,Sa\rangle = 0$ en $\langle Sb,Sb\rangle = 0$. Maar dan is $Sa = Sb = 0$, en dus is $S=0$ omdat $\{a,b\}$ een basis van $\mathcal{L}(V)$ is.