Antwoorden Lineaire Algebra 2NA van 16-1-2015.

1a. Stel dat $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}$ voor zekere getallen $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{C}$. Inproduct nemen met $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ levert de vergelijkingen

$$\lambda+\frac{i}{2}\mu=0,\quad -\frac{i}{2}\lambda+\mu+\frac{i}{2}\nu=0,\quad -\frac{i}{2}\mu+\nu=0.$$

Oplossen van dit stelsel geeft $\lambda=\mu=\nu=0$, dus het stelsel is inderdaad lineair onafhankelijk.

b. We gebruiken Gram-Schmidt. Door met $\mathbf{a},\mathbf{c}$ te beginnen er is maar één niet-triviale stap: een vector $\mathbf{b}''$ die orthogonaal is met $\mathbf{a}$ en $\mathbf{c}$ is

$$\mathbf{b}'=\mathbf{b}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a}-\langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{c}=\mathbf{b}-\frac{i}{2}\mathbf{a}+\frac{i}{2}\mathbf{c}.$$

Verder is $\langle\mathbf{b}',\mathbf{b}'\rangle=\frac{1}{2}$ dus een orthonormale basis is $\{\mathbf{a},\mathbf{c},\sqrt{2}\mathbf{b}'\}$.

c. We gebruiken $P(\mathbf{x})=\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle\mathbf{a}$:

$$P(\mathbf{a})=\mathbf{a},\ P(\mathbf{b})=\frac{i}{2}\mathbf{a},\ P(\mathbf{c})=\mathbf{0},$$

de matrix is dus $\begin{pmatrix}1&\frac{i}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. We kiezen eerst een linksdraaiende (positief georiënteerde) orthonormale basis met de eerste vector langs ℓ, zo'n basis is bijvoorbeeld $\mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$. Nu is de standaardmatrix van D gelijk aan $D_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}=C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}=$

$$=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\0&\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

3a. De geassocieerde matrix is $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Deze matrix heeft karakteristiek polynoom $\lambda^2 - 9\lambda + 14$ en eigenwaarden $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. Op de eenheidscirkel neemt $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ de waarden in het interval $[2, 7]$ aan; op de cirkel $|\mathbf{x}| = \sqrt{3}$ is het bereik dus $[6, 21]$.

b. $q(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 7y_2^2$.

c. De richtingen van de hoofdassen zijn de eigenvectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de vergelijkingen van de hoofdassen zijn daarmee $x_1 = 2x_2$ en $x_2 = -2x_1$. Er zijn geen asymptoten: q is positief definiet (alle eigenwaarden zijn positief) en K is dus een ellips. De snijpunten van K met de hoofdassen zijn $(\sqrt{10}, \frac{1}{2}\sqrt{10})$, $(-\sqrt{10}, -\frac{1}{2}\sqrt{10})$, $(\frac{1}{7}\sqrt{35}, -\frac{2}{7}\sqrt{35})$ en $(-\frac{1}{7}\sqrt{35}, +\frac{2}{7}\sqrt{35})$.

d. Tekening.

4a. We bepalen eerst T_h^*:

$$\langle T_h(f), g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)h(x)}g(x)\,dx = \int_0^1 \overline{f(x)h(x)}g(x)\,dx = \langle f, T_h^*(g)\rangle$$

dus $T_h^*(g)(x) = \overline{h(x)}g(x)$ voor $g \in V$. Vervolgens moeten we aantonen dat $T_hT_h^* = T_h^*T_h$: voor $f \in V$ is

$$(T_hT_h^*)(f)(x) = T_h(T_h^*f)(x) = h(x)(T_h^*f)(x) = h(x)\overline{h(x)}f(x) = |h(x)|^2 f(x),$$

net zo is

$$(T_h^*T_h)(f)(x) = \overline{h(x)}h(x)f(x) = |h(x)|^2 f(x).$$

T_h is dus inderdaad normaal.

b. Laat $h(x) = x$ zijn: stel λ is een eigenwaarde, dan is er een continue functie $f \neq 0$, zo dat $xf(x) = \lambda f(x)$ voor alle $x \in [0, 1]$. Dan moet $f(x) = 0$ zijn als $x \neq \lambda$. Omdat f continu is, is ook $f(\lambda) = 0$ als $\lambda \in [0, 1]$, dus $f(x) = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$ (als $\lambda \notin [0, 1]$ volgt meteen $f = 0$). T_h heeft dus geen eigenwaarden.

c. Laat $g, h \in V$. Voor $f \in V$ en $x \in [0,1]$ is

$$T(g+h)(f)(x) = T_{g+h}(f)(x) = (g+h)(x)f(x) = (g(x)+h(x))f(x) =$$

$$= T_g(f)(x) + T_h(f)(x) = (T(g)+T(h))(f)(x)$$

en voor $\lambda \in \mathbb{C}$ is

$$T(\lambda h)(f)(x) = T_{\lambda h}(f)(x) = (\lambda h)(x)f(x) = \lambda h(x)f(x) = \lambda T_h(f)(x) = \lambda T(h)(f)(x)$$

dus

$$T(g+h) = T(g) + T(h), \quad T(\lambda h) = \lambda T(h).$$

T is inderdaad lineair.

5. Voor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ is

$$\mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2 \geq 0.$$

gelijkheid geldt alleen als $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Er is een $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ waarvoor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan en slechts dan als A niet-inverteerbaar is. Alleen als A wel inverteerbaar is, is dus $\mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x} > 0$ voor alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.