1.a. $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

of $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. We gaan uit van de 1e keuze voor $\underline{x}, H, \underline{a}$:

H heeft e.w. -4 en 1 met e.v. $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$H = UDU^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = e^{tH}\underline{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{t} \\ -4e^{-4t} & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad y(t) = \frac{4}{5}e^{-4t} + \frac{1}{5}e^{t}.$$

2.a. $R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = U R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} U^{T}$ met $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & +\sin 90^\circ \\ 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en U een orthogonale matrix met $\det U = 1$

en $U\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dus bijv. is $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(een andere mogelijkheid voor U is $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

ook is het mogelijk in $R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ bijv. de 3e kolom $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ te nemen, dan is $U\underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$).

$$R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & +1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ +1 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

b. R is orthogonaal (draaispiegeling) dus $R^{T}R = I$

$S^{T}S = (-R^3)^{T}(-R^3) = (R^{T})^3 R^3 = (R^{T}R)^3 = I$ omdat R, R^{T} commuteren. Of $(R^{T})^3 R^3 = (R^{-1})^3 R^3 = R^{-3}R^3 = I$.

Ook mag worden gebruikt dat $-(R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^3 = S_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ orthogonaal is (je kunt deze uitrekenen) omdat een lin. afb. orthogonaal is d.e.s.d. als de standaard matrix dat is. Omdat $(R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^4 = I$ is $(R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^3 = (R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^{-1} = (R_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})^{T}$

b. We gaan uit van $-10x'^2 + 5y'^2 - 8\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' = 7$.

Kwadraatafsplitsen geeft $-10\left(x' + \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 + 5\left(y' + \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 0$

de vergelijkingen zijn dus

$$\pm\sqrt{2}\left(x' + \frac{2}{5}\sqrt{5}\right) = y' + \frac{1}{5}\sqrt{5} \quad \text{ofwel}$$

$$\pm\sqrt{2}\left(\frac{x-2y+2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2x+y+1}{\sqrt{5}} \quad \text{ofwel}$$

$$\pm\sqrt{2}(x-2y+2) = 2x+y+1.$$

4a. lineariteit in de 2e component

$\langle \underline{x}, \lambda \underline{y}_1 + \mu \underline{y}_2 \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y}_1 \rangle + \mu \langle \underline{x}, \underline{y}_2 \rangle$ gaat goed voor alle a_k.

conjugatiesymmetrie

$\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = \overline{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}$ geldt als $a_k = \bar{a}_k$ dus $a_k \in \mathbb{R}$.

pos. definiet

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0$ geldt als alle $a_k > 0$.

b. een basis van V is $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots\}$ met $\underline{e}_k$ het rijtje $(0, 0, \ldots, \underset{\underset{k}{\downarrow}}{1}, 0 \ldots)$. Een orthonormale basis is nu $\{\underline{e}_1, \sqrt{2}\underline{e}_2, \sqrt{3}\underline{e}_3, \ldots\}$: deze rijtjes spannen weer V op ~~en~~ $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$ als $i \neq j$, $\underline{e}_k \cdot \underline{e}_k = 1/k$ dus $\sqrt{k}\,\underline{e}_k \cdot \sqrt{k}\,\underline{e}_k = 1$ voor alle k.

c. T is niet injectief nl. $T(1, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$

d. T is surjectief want $T(0, x_2, x_3 \ldots) = (x_2, x_3 \ldots)$ voor alle $x_2, x_3, \ldots$

e. $\langle \underline{x}, T(\underline{y}) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \bar{x}_k y_{k+1} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell-1} \bar{x}_{\ell-1} y_\ell = \langle T^*(\underline{x}), \underline{y} \rangle$

waarbij $T^*(\underline{x})_\ell = \frac{\ell}{\ell-1} x_{\ell-1}$, $T^*(\underline{x})_1 = 0$

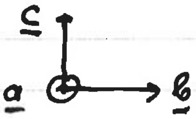
dus $T^*(\underline{x}) = \left(0, \frac{2}{1}x_1, \frac{3}{2}x_2, \frac{4}{3}x_3, \ldots\right)$

2c. $\det S = \det(-R^3) = (-1)^3(\det R)^3 = 1$ dus S is een draaiing.

De draaiingsas is weer $\text{span}\left\{\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$:

$S\underline{a} = -R^3\underline{a} = -(-1)^3\underline{a} = \underline{a}$

Als $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ een rechtsdraaiend orthonormaal stelsel is dan is $R\underline{b} = -\underline{c}$ dus $S\underline{b} = -R^3\underline{b}$
$= -\underline{c}$



dus de rotatiehoek is weer 90°.

3. $A = \begin{pmatrix}2 & 6\\6 & -7\end{pmatrix}$, de verg. van K is $\underline{x}^T A\underline{x} + \underline{b}^T\underline{x} = f$

$\underline{b} = \begin{pmatrix}-4\\18\end{pmatrix}$, $f = 7$.

als U een orthogonale matrix van eigenvectoren is van A dan is $A = UDU^T$, D diag. matrix en
$\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T UDU^T\underline{x} = \underline{y}^T D\underline{y}$ met $\underline{y} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = U^T\underline{x} = U^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

dus $C = U^T$: A heeft e.w. -10 en 5 met e.v. $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

dus $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

De vergelijking van K is nu $\underline{y}^T D\underline{y} + \underline{b}^T U\underline{y} = f$

$U^T\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-40\\10\end{pmatrix}/\sqrt{5} = \begin{pmatrix}-8\sqrt{5}\\2\sqrt{5}\end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix}-10 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$

$-10x'^2 + 5y'^2 - 8\sqrt{5}\,x' + 2\sqrt{5}\,y' = 7.$ ⟵

→ uiteraard kan ook $D = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -10\end{pmatrix}$ worden gekozen,
dan is $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$, $U^T = C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

en $U^T\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{5}\\8\sqrt{5}\end{pmatrix}$

dus $5x'^2 - 10y'^2 + 2\sqrt{5}\,x' + 8\sqrt{5}\,y' = 7$ is de vergelijking.

Omdat niet wordt geëist dat $\det C = +1$, is ook $C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}$ goed, dan is de vergelijking
$5x'^2 - 10y'^2 - 8\sqrt{5}\,x' - 2\sqrt{5}\,y' = 7$
en zo zijn er nog mogelijkheden, die in de vergelijking neerkomen op een tekenwisseling bij de coëff. van x' en/of y'.