Toets Lineaire Algebra 2NA

Woensdag 4 november 2015, 14.00-16.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 50 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 28 pt.

---

1. In $\mathbb{C}^4$ met standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$ wordt gegeven de lineaire deelruimte

$$W = \{\sum_{i=1}^{4} x_i \mathbf{e}_i : \; ix_1 + x_2 = x_3, \; x_4 = 0\}.$$

a. Bepaal met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van W. (6 pt)

b. Bepaal een basis van $W^\perp$. (4 pt)

c. Bereken de orthogonale projectie van de vector $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ op W. (4 pt)

2. Op $\mathbb{R}^2$ met standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ wordt een inwendig product $\langle \; , \; \rangle$ gegeven door

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

a. Bepaal $\langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle$. (2 pt)

b. Geef een matrix A zodanig dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. (2 pt)

c. Beargumenteer dat de vorm $\langle \; , \; \rangle$ inderdaad een inwendig product op $\mathbb{R}^2$ is. (7 pt)

3. $V = P_3(\mathbb{C})$ is de vectorruimte van complexe polynomen van graad hoogstens 3.

a. Ga na of het stelsel $\{x^3 + x, x^3 - x, x^2 + x + 1, 1\}$ een basis is van V. (6 pt)

De afbeelding $T : V \to V$ wordt gegeven door

$$T(p)(x) = \frac{1}{2} p''(1)(x-1)^2 + p(1).$$

b. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (3 pt)

c. Geef de matrix van T t.o.v. de basis $\{x^3, x^2, x, 1\}$ van V. (6 pt)

d. Bepaal een basis van $\mathrm{im}(T)$ en een basis van $\ker(T)$. (6 pt)

e. Ga na of T een projectie is. (4 pt)