Toets Lineaire Algebra 2NA

Vrijdag 8 januari 2016, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 60 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 33 pt.

---

1. Beschouw de tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking met beginvoorwaarden (een *beginwaardenprobleem*)

$$y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -3. \qquad (*)$$

Dit beginwaardenprobleem kan worden omgeschreven in een equivalent vectorieel beginwaardenprobleem

$$\mathbf{x}'(t) = H\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}. \qquad (\dagger)$$

Hierbij is H een 2×2-matrix, $\mathbf{a}$ een vector in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ is een vectorwaardige functie die van t afhangt.

a. Geef een geschikte matrix H en schrijf de componenten van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{x}(t)$ uit. (2 pt)

b. Bepaal de oplossing $y(t)$ van het beginwaardenprobleem $(*)$ door het beginwaardenprobleem $(\dagger)$ op te lossen met behulp van de e-macht van een matrix. (8 pt)

2. $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaispiegeling met als draaiingsas $\text{span}\{(1, 0, -1)^T\}$ en draaiingshoek $90°$; gezien vanaf het punt $(1, 0, -1)$ in de richting van de oorsprong is de draairichting met de klok mee.

a. Bepaal de standaardmatrix van R. (8 pt)

Beschouw nu de afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $S = -R^3$ (waarbij $R^3(\mathbf{x}) = R(R(R(\mathbf{x})))$).

b. Toon aan dat S een orthogonale afbeelding is. (3 pt)

c. Leg uit of S een draaiing of draaispiegeling is, en beredeneer wat de draaiingsas en de draaiingshoek en draairichting (gezien vanaf het punt $(1, 0, -1)$ in de richting van de oorsprong) zijn. (4 pt)

Op de volgende bladzijde staat de rest van de opgaven.

3. Beschouw de kwadratische kromme K gegeven door de vergelijking

$$2x^2 - 7y^2 + 12xy - 4x + 18y - 7 = 0.$$

a. Bepaal expliciet een hoofdassentransformatie, d.w.z. geef een orthogonale basistransformatiematrix C zodanig dat $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ waarbij de vergelijking van K in termen van x', y' geen mengterm $x'y'$ bevat. Schrijf tevens de vergelijking van K in termen van x', y'. (8 pt)

b. Toon aan dat K de vereniging is van twee rechte lijnen en geef de vergelijkingen van deze lijnen (in termen van x, y). (6 pt)

4. In deze opgave beschouwen we de vectorruimte V van oneindige rijtjes $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ waarbij $x_1, x_2, \ldots$ complexe getallen zijn en slechts eindig veel x_k ongelijk aan nul zijn. Een wiskundige onderzoeker wil deze vectorruimte voorzien van een inwendig product. Er zijn daarvoor uiteraard vele mogelijkheden maar zij kiest voor een inwendig product van de vorm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{x_k} y_k$, waarbij x_k en y_k de k-de component van het rijtje $\mathbf{x}$, resp. $\mathbf{y} \in V$ voorstellen en $a_1, a_2, \ldots$ geschikte complexe getallen zijn.

a. Aan welke voorwaarden moeten de getallen $a_1, a_2, \ldots$ voldoen opdat de vorm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ inderdaad een inwendig product op V is? (5 pt)

De onderzoeker kiest uiteindelijk voor een inwendig product van de vorm

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \overline{x_k} y_k.$$

b. Geef een orthonormale basis van V. Leg tevens uit dat het gegeven stelsel inderdaad een orthonormale basis van V is! (5 pt)

Bekijk nu de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gegeven door

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)$$

(de linksverschuivingsafbeelding).

c. Leg uit of T injectief is. (3 pt)

d. Leg uit of T surjectief is. (2 pt)

e. Bepaal, indien deze bestaat, de hermites geadjungeerde van T. (6 pt)