Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Donderdag 14 maart 2019, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 65 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 36 pt.

---

1. A is een 3×3-matrix met (onderling orthogonale) eigenvectoren $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ en eigenwaarden 1, i resp. 0.

   a. Stel de matrix A op.

   b. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A^*.

2. Bepaal de oplossing $(x_1(t), x_2(t))$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) &+ x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) &+ x_2(t) \end{cases}$$

   met beginvoorwaarden $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$.

3. De op $\mathbb{R}^3$ gedefinieerde kwadratische functies

$$q_a(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz$$

   hebben een kritiek (of stationair) punt in $(0, 0, 0)$.

   a. Ga na, voor welke waarden van a de functie q_a in $(0, 0, 0)$ een (locaal) minimum aanneemt.

   b. Ga na, voor welke waarden van a de functie q_a in $(0, 0, 0)$ een (locaal) maximum aanneemt.

√4. Laat V een complexe vectorruimte met een inwendig product zijn en laat $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ een orthonormale basis van V zijn.

a. Bepaal met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis $\mathcal{B} = \{d, e, f\}$ van V waarbij d een scalair veelvoud van de vector $a+b+c$ is.

Beschouw de lineaire afbeelding $T : V \to V$ die wordt gegeven door

$$T(a) = b,\ T(b) = -c,\ T(c) = -a.$$

b. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van T.

c. T^* is de hermites geadjungeerde van T. Bepaal de beelden $T^*(a), T^*(b), T^*(c)$.

d. Bereken het matrixelement $(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}})_{11}$.

√5. Beschouw de complexe vectorruimte X die wordt opgespannen door de drie functies $1, e^{ix}, e^{-ix}$, met de gewone optelling en scalaire vermenigvuldiging van functies. Op X leggen we een inwendig product $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$. Gegeven wordt verder de lineaire afbeelding $P : X \to X$ door $P(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-t)}f(t)\,dt$.

a. Toon aan dat $\{1, e^{ix}, e^{-ix}\}$ een orthogonale basis van X is.

b. Bewijs dat P een projectie is.

c. Leg uit of P ook een orthogonale projectie is.

(Ter herinnering: $\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at} + C$ voor $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$.)

Puntenverdeling:

1a	b	2	3	4a	b	c	d	5a	b	c	Totaal
7	3	8	8	7	8	4	4	5	6	5	65