

Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Vrijdag 11 januari 2019, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 70 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 39 pt.

1. Gegeven is de matrix $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. Toon aan dat A een orthogonale matrix is.

Een orthogonale 3×3 -matrix is de standaardmatrix van een draaiing of een (draai)spiegeling.

- b. Leg uit of A de standaardmatrix is van een draaiing of van een (draai)spiegeling.

- c. Bepaal de sinus van de draaiingshoek vanuit het gezichtspunt van een punt op de draaiingsas met positieve x_1 -coördinaat, kijkend in de richting van de oorsprong.

$\rightarrow$ $\times$ of min en sinus

2. Beschouw de vectorruimte $V = \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ met de afbeelding $T : V \rightarrow V$ die wordt gegeven door

$$T(M) = N^T M N$$

voor $M \in V$, waarbij $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Verder wordt op V een inwendig product gedefinieerd door $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

- a. Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

- b. Geef een uitdrukking voor het beeld $T^*(M)$ van $M \in V$ onder de hermites geadjungeerde afbeelding T^* .

- c. Toon aan dat T een normale afbeelding is.

- d. Bepaal een orthonormale basis van V bestaande uit eigenmatrices (= "eigenvectoren") van T .

3. Beschouw de vectorruimte P_2 van complexe polynomen van graad hoogstens 2, met als basis $\mathcal{A} = \{1, X, X^2\}$.

a. Toon aan dat $\mathcal{B} = \{X + X^2, 1 + X, 1 + X^2\}$ eveneens een basis van P_2 is.

De lineaire afbeelding $T : P_2 \rightarrow P_2$ wordt gegeven door

$$T(p)(X) = p(0) + p'(0)X + p''(0)X \quad (p \in P_2).$$

b. Bepaal bases van $\ker(T)$ en $\text{im}(T)$.

c. Ga na of T een projectie is.

d. Bepaal de matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ van T t.o.v. de basis $\mathcal{B}$.

4. De hyperbool $K \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door de vergelijking

$$x_1^2 - 6x_1x_2 - 7x_2^2 = 1.$$

waarbij x_1, x_2 de coördinaten t.o.v. de standaardbasis zijn.

a. Stel een hoofdassenvorm op van K .

b. Bepaal een vergelijking (in termen van x_1, x_2) van elk van de asymptoten van K .

c. Maak een tekening waarin de hoofdassen van K , de asymptoten, en de ligging van K t.o.v. de asymptoten zichtbaar zijn (verdere details zijn niet nodig).

5. Zij A een hermites $n \times n$ -matrix.

Bewijs dat e^{iA} een unitaire matrix is.

Puntenverdeling:

1a	b	c	2a	b	c	d	3a	b	c	d	4a	b	c	5	Totaal
2	3	8	2	6	4	8	3	6	4	7	4	5	4	4	70

1 2 6 1 0 1 0 2 4 2 4 3 3 2