Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Donderdag 28 maart 2013, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 65 punten worden gehaald. Het resultaat is voldoende bij (minstens) 36 punten.

---

1. De lineaire deelruimte W van $\mathbb{C}^3$ wordt opgespannen door de vectoren $\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\2i\\1\end{pmatrix}$.

a. Bepaal met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van W. (5 pt)

b. Geef een orthonormale basis van $W^{\perp}$. (4 pt)

c. Bereken de orthogonale projectie van $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ op W. (4 pt)

2. De afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing om de lijn $\text{span}\{(1, -2, 0)^T\}$ over een hoek π.

Gebruik de theorie van basistransformaties om de standaardmatrix van R te bepalen. (10 pt)

3. Gegeven is de kwadratische kromme $K \subset \mathbb{R}^2$ met vergelijking $2x^2 - 7y^2 + 12xy = 25$.

a. Wat voor type kromme is K? (Leg uit!) (5 pt)

b. Bepaal een vergelijking van beide hoofdassen van K. (5 pt)

c. Bepaal de snijpunten van K met zijn hoofdassen. (5 pt)

Op de volgende bladzijde staat de rest van de opgaven.

4. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Los het stelsel op met behulp van de e-macht van een geschikte matrix. (10 pt)

5. Zij V een complexe vectorruimte met een inwendig product en een orthonormale basis $\{A, B, C\}$. ω is het complexe getal $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$. ω is een derdemachtseenheidswortel, m.a.w. $\omega^3 = 1$.

De lineaire afbeelding $S : V \to V$ wordt gegeven door

$$S(A) = \omega B, \ S(B) = \omega C, \ S(C) = \omega A.$$

a. Geef de matrix van S t.o.v. de basis $\{A, B, C\}$. (2 pt)

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van S. (7 pt)

c. Ga na dat de eigenvectoren een orthogonale basis van $\mathbb{R}^3$ vormen. Hoe heet een lineaire afbeelding met de eigenschap dat er een orthogonale basis van eigenvectoren bestaat? (3 pt)

d. Bepaal de beelden van A, B en C onder de hermites geadjungeerde afbeelding S^*. (5 pt)

***** EINDE *****