Tussentoets Lineaire Algebra 2NA

Vrijdag 8 november 2013, 13.45-15.45

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 57 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 32 pt.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$.

a. Ga na of A een unitaire matrix is. (2p)

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. (6p)

c. Bepaal een unitaire matrix U en een diagonaalmatrix D zodanig dat $A = UDU^*$. (6p)

2. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{C}^4$ met de lineaire deelruimte $W \subset \mathbb{C}^4$ opgespannen door de vectoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ en $\mathbf{b} = i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Hierbij zijn $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ de standaardbasisvectoren van $\mathbb{C}^4$.

a. Geef een basis voor $W^\perp$. (6p)

b. Bepaal met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van W. (7p)

c. Bepaal de matrix van orthogonale projectie op W. (5p)

d. Bereken het beeld van de vector $\mathbf{c} = i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3$ onder orthogonale projectie op $W^\perp$. (4p)

3. De vectorruimte van reële polynomen van graad hoogstens n geven we aan met P_n. Voor willekeurige $n \in \{1, 2, \ldots\}$ definiëren we een afbeelding $T_n : P_n \to P_{n-1}$ door $T_n(p)(x) = p(x+1) - p(x)$ voor $p \in P_n$.

a. Toon aan dat de afbeeldingen T_n lineaire afbeeldingen zijn. (4p)

b. Formuleer de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen. (2p)

c. Bepaal de kern van T_n. (4p)

d. Ga na of de afbeeldingen T_n surjectief zijn. (4p)

Laat nu $n = 3$ zijn; we bekijken dus de afbeelding $T_3 : P_3 \to P_2$.

e. Geef de matrix van T_3 t.o.v. zelfgekozen bases van P_3 en P_2. (7p)