Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Vrijdag 17 januari 2014, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 69 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 38 pt.

---

1. V is een tweedimensionale complexe vectorruimte voorzien van een inwendig product, met een orthonormale basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. De lineaire afbeelding $U : V \to V$ wordt gegeven door

$$U|\uparrow\rangle = -|\downarrow\rangle, \quad U|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle.$$

a. Toon aan dat U een unitaire afbeelding is. (6 p)

b. Bepaal de eigenwaarden en geef een orthonormaal stelsel van eigenvectoren van U in V. (8 p)

2. De kwadratische vorm Q op $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

a. Ga na dat de kwadratische kromme K met vergelijking $Q(x_1, x_2) = 6$ een hyperbool is. (3 p)

b. Geef een vergelijking van de hoofdassen (dit zijn tevens de symmetrieassen) van K. (5 p)

c. Geef een vergelijking van de asymptoten van K. (4 p)

d. Bepaal de snijpunten van K met de x_1- en x_2-as en teken K. (6 p)

3. Laat C de matrix $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ zijn.

a. Ga na dat C niet-diagonaliseerbaar is. (4 p)

b. Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op

$$\begin{cases} x'(t) &= 7x(t) - 2y(t) \\ y'(t) &= 8x(t) - y(t) \end{cases}$$

onder de beginvoorwaarden $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. (8 p)

*** Z.O.Z. ***

4. $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing in $\mathbb{R}^3$ om de as $\ell = \text{span}\{(1, -2, 1)^T\}$. De draaiingshoek is gelijk aan $+\pi/4$ als je vanaf het punt $(1, -2, 1)$ in de richting van de oorsprong kijkt.

Gebruik basistransformatiematrices om de standaardmatrix van R te bepalen. Het is voldoende om de matrix als een product van drie matrices te schrijven; dit product hoeft verder niet te worden uitgerekend. (9 p)

5. Zij $V = C[0, 1]$ de vectorruimte van continue complexe functies op het interval $[0, 1]$ met inwendig product $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx$. De lineaire afbeelding $P : V \to V$ beeldt de functie $f \in V$ af op de constante functie $\int_0^1 f(x)\, dx$.

a. Toon aan dat P een projectie is. (5 p)

b. Ga na of P een orthogonale projectie is. (5 p)

6. Zij V een eindig-dimensionale complexe vectorruimte met een inwendig product en $T : V \to V$ een lineaire afbeelding. Een lineaire deelruimte $W \subset V$ heet *invariant* onder T als voor elke $v \in W$ geldt dat $T(v) \in W$.

Bewijs het volgende resultaat: als W een invariante lineaire deelruimte onder T is, dan is $W^\perp$ invariant onder de hermites geadjungeerde T^*. (6 p)