

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
maandag 9 januari 2006, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.

1. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbf{R}^3$ met de lineaire deelruimten $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ en

$$W = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\right\}.$$

- a. Leg uit dat $V = U \oplus W$. (4 pt)

Zij $\pi_U : V \rightarrow V$ de projectie op U langs W .

- b. Wat is de rang van π_U ? (2 pt)

- c. Bepaal de matrix van π_U t.o.v. de standaardbasis in $V = \mathbf{R}^3$. (6 pt)

2. B is de permutatiematrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Toon aan dat het karakteristieke polynoom van B gelijk is aan $-(X^2 - 1)(X^3 - 1)$. (3 pt)

B heet diagonaliseerbaar *over* K ($K = \mathbf{R}$ of \mathbf{C}) als er een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix U bestaan met elementen in K zo, dat $B = UDU^{-1}$.

- b. Is B diagonaliseerbaar over \mathbf{C} ? (6 pt)

- c. Is B diagonaliseerbaar over \mathbf{R} ? (3 pt)

3. Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 - 7x_2^2$ op \mathbf{R}^2 , $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

- a. Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. (2 pt)

- b. Bepaal een orthogonale matrix U en reële getallen d_1, d_2 zo, dat $q(\mathbf{x}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2$ en $U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (6 pt)

- c. Is de kwadratische vorm positief (semi-)definitief? (2 pt)

4a. Bepaal een matrix A met karakteristiek polynoom $-X^5 + X^4$ en minimumpolynoom $X^4 - X^3$. (5 pt)

b. Bestaat er een matrix B met hetzelfde karakteristieke polynoom en hetzelfde minimumpolynoom als de matrix A in (a) terwijl B niet gelijkvormig is met A ? (4 pt)

5. $S : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ is een lineaire afbeelding met eigenwaarden 2 en -1 en bijbehorende eigenvectoren $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. (Op \mathbf{C}^2 is het standaard-hermites inproduct op de gebruikelijke wijze gedefinieerd.)

a. Leg uit dat uit de gegevens volgt dat S een normale afbeelding is. (4 pt)

b. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis in \mathbf{C}^2 . (5 pt)

c. Bepaal de Euclidische norm $\|S\|$ van S . (2 pt)

d. Bereken de standaardmatrix van e^S . (4 pt)

(Als het niet gelukt is het antwoord van (b) te bepalen, dan mag i.p.v. (d) de matrix $e^{S'}$ met $S' = \begin{pmatrix} -2 & 6i \\ -6i & 7 \end{pmatrix}$ worden uitgerekend. Merk op dat S' niet de standaardmatrix van S is!)

6. V is een complexe vectorruimte met hermites inproduct $(\ , \)$. De dimensie van V is gelijk aan 3. $\{a, b\}$ is een orthonormaal stelsel in V . Verder is de afbeelding $T : V \rightarrow V$ gegeven door $T(x) = i(a, x)b - i(b, x)a$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Bewijs dat T een hermitese (of zelfgeadjungeerde) afbeelding is. (5 pt)

c. Bewijs dat T^2 een orthogonale projectie is op $\text{span}\{a, b\}$. (4 pt)

d. Is T zelf ook een orthogonale projectie? (2 pt)

Antwoorden bij het tentamen van 9-1-06.

- 1a. Omdat $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ (nagaan!) is de som $U + W$ gelijk aan de directe som $U \oplus W$. Verder is $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = 3$, dus is $U \oplus W = V$ (een lineaire deelruimte van een eindig-dimensionale vectorruimte V met dimensie gelijk aan $\dim(V)$, is gelijk aan V).
- b. De rang van π_U is de dimensie van het bereik $\text{im}(\pi_U)$, dus $\text{rang}(\pi_U) = \dim(U) = 1$.
- c. Noem de matrix P . Dan is

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2a. Doen.

- b. $B = UDU^{-1}$ betekent $BU = UD$ dus $Bu_i = d_i u_i$ met u_i de i -e kolomvector van U en $d_i = D_{ii}$. Dus B diagonaliseerbaar over K dan en slechts dan als B een basis van eigenvectoren in K^n heeft (waarbij de eigenwaarden in K liggen).

Methode 1: B is unitair dus B heeft een (orthonormale) basis van eigenvectoren in \mathbf{C}^n ; B is dus diagonaliseerbaar over \mathbf{C} .

Methode 2: Het karakteristieke polynoom van B heeft nulpunten $1, -1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$. De e.w. $-1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$ hebben alle algebraïsche en dus meetkundige multipliciteit 1, de e.w. 1 heeft alg.mult. 2 en B is diagonaliseerbaar precies dan indien de meetkundige multipliciteit ook 2 is,

m.a.w. als de nulruimte/kern van $B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dimensie 2 heeft (m.a.w.

indien $\text{rang}(B - I) = 3$). Dit is inderdaad het geval (de som van de 1e, 3e en 5e rij is de nulrij en de som van de 2e en 4e rij ook).

- c. Omdat B ook niet-reële eigenwaarden heeft (nl. $1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$) kan B nooit een basis van eigenvectoren in \mathbf{R}^5 hebben. B is dus niet diagonaliseerbaar over \mathbf{R} .

3a. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}.$

- b. A heeft eigenwaarden 5 en -10 met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dus is $A = UDU^T$ met

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ en $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ een orthogonale matrix van eigenvectoren. $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T U D U^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = 5y_1^2 - 10y_2^2$ en $U^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$ dus $\mathbf{y} = U \mathbf{x}$.

- c. De symmetrische matrix A is positief (semi-)definit als A louter positieve (resp. niet-negatieve) eigenwaarden heeft. A heeft echter zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde, dus is indefinit.

- 4a. A moet een 5×5 -matrix zijn. De eigenwaarden zijn 0 met alg. multipliciteit 4 en 1 met alg. multipliciteit 1. Omdat in het minimumpolynoom $X^3(X-1)$ de factor X drie keer voorkomt, is de grootte van het grootste Jordanblok bij de e.w. 0 gelijk aan 3. Een matrix met deze eigenschappen

is de Jordan-normaalvorm
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b. De JNV van de matrix heeft volgens (a) 1 Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 3 en heeft dus nog een Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 1; er is een Jordanblok bij e.w. 1 van grootte 1. De Jordan-normaalvorm is dus uniek (op permutatie van de blokken na). Daar twee matrices gelijkvormig zijn precies dan indien zij dezelfde JNV hebben, bestaat er niet zo'n matrix B .

5. De eigenvectoren zijn t.o.v. het standaard hermites inproduct orthogonaal: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot 1 + 1 \cdot i = 0$. S heeft dus een orthogonale basis van eigenvectoren en is dus een normale afbeelding.

- b. Gebruik de spectraaldecompositie: (we schrijven S voor de standaardmatrix): $S = 2u_1u_1^* - u_2u_2^*$ met $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (of $S = UDU^*$ met $U = (u_1 \ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Uitwerken geeft $S = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (-i \ 1) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1 \ -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -3i & 1 \end{pmatrix}$.

- c. Omdat S normaal is, is $\|S\|$ gelijk aan het maximum van de moduli van de eigenwaarden, dus $\|S\| = 2$.

- d. $e^S = e^2u_1u_1^* + e^{-1}u_2u_2^*$ of $e^S = Ue^DU^*$ met $e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$. Uitwerken geeft

$$e^S = \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (-i \ 1) + \frac{e^{-1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1 \ -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + e^{-1} & ie^2 - ie^{-1} \\ -ie^2 + ie^{-1} & e^2 + e^{-1} \end{pmatrix}.$$

- d.' De matrix S' is hermites en heeft eigenwaarden 10 en -5 met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

De norm van S' is dus 10 en $S' = UDU^*$ met $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Dan is

$$e^{S'} = Ue^DU^* = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{10} + 4e^{-5} & 2ie^{10} - 2ie^{-5} \\ -2ie^{10} + 2ie^{-5} & 4e^{10} + e^{-5} \end{pmatrix}.$$

- 6a. We gebruiken dat het inproduct lineair is in de tweede component: $T(x + y) = i(a, x + y)b - i(b, x + y)a = i(a, x)b + i(a, y)b - i(b, x)a - i(b, y)a = T(x) + T(y)$ en $T(\lambda x) = i(a, \lambda x)b - i(b, \lambda x)a = i\lambda(a, x)b - i\lambda(b, x)a = \lambda T(x)$ voor $\lambda \in \mathbf{C}$ en $x, y \in V$.
- b. Methode 1: $(T(x), y) = (i(a, x)b - i(b, x)a, y) = -i(x, a)(b, y) + i(x, b)(a, y)$ wegens antilineariteit van de eerste component en $(x, a) = \overline{(a, x)}$. $(x, T(y)) = (x, i(a, y)b - i(b, y)a) = i(a, y)(x, b) - i(b, y)(x, a)$ wegens lineariteit van de tweede component. We zien dat $(T(x), y) = (x, T(y))$ voor $x, y \in V$ en dus is T hermites.
- Methode 2: Vul $\{a, b\}$ aan tot een orthonormale basis $\{a, b, c\}$ van V . Daar $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ en $T(c) = 0$ is de matrix van T t.o.v. deze basis $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en daar $A_T^* = A_T$ is ook $T = T^*$ (deze conclusie gaat alleen op als A_T de matrix is t.o.v. een **orthonormale** basis!).
- c. Uit $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ volgt dat $T^2(a) = a$ en $T^2(b) = b$ en verder is $T^2(x) = T(x) = 0$ als $(x, a) = (x, b) = 0$. Dus is $T^4 = (T^2)^2 = T^2$ en T^2 is net als T hermites. T^2 is dus een orthogonale projectie op $\text{im}(T) = \text{span}\{a, b\}$.
- d. Daar $T^2 \neq T$ is T geen (orthogonale) projectie.