TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
dinsdag 3 april 2007, 10.00-13.00

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.
Grafische en programmeerbare rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone (niet-programmeerbare) wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

1. Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ het vlak met vergelijking $x_1 + 2x_2 = 0$. $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de loodrechte spiegeling in V.

a. Bepaal een orthonormale basis van V. (4 pt)

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en bepaal de matrix van S t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

2. Beschouw in $\mathbf{C}^2$ de vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{x_1}y_1 + i\,\overline{x_2}y_1 - i\,\overline{x_1}y_2 + 3\overline{x_2}y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ ,\ )$ een (hermites) inwendig product op $\mathbf{C}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{C}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ ,\ )$. (10 pt)

3. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een Jordan-normaalvorm van A. (10 pt)

b. Bepaal het minimumpolynoom van A. (3 pt)

c. Druk A^{-1} uit als een polynoom in A. (3 pt)

De laatste twee opgaven staan op de volgende pagina.

4. Zij P_n de vectorruimte van polynomen $p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ van graad hoogstens n met complexe coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n$ en met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Met $p'(X)$ geven we de afgeleide naar X van $p(X)$ aan. Laat $U = \{p \in P_n : p(1) = p'(1) = 0\}$ en $W = \mathrm{span}\{1, X\}$.

a. Toon aan dat U een lineaire deelruimte is van P_n. (4 pt)

b. Toon aan dat $\{(X-1)^2, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n\}$ een basis is van U. (4 pt)

c. Bewijs dat $P_n = U \oplus W$. (4 pt)

$\pi : P_n \to P_n$ is de lineaire afbeelding gegeven door $\pi(p)(X) = p(1) + p'(1)(X-1)$.

d. Bepaal de matrix van π t.o.v. de basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. (6 pt)

e. Leg uit dat π de projectie op W langs U is (m.a.w. π is de projectie op de tweede component van de directe som in (c)). (6 pt)

5. Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices met inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B)$ (voor n geheel, $n > 1$). Voor $D \in V$ is de lineaire afbeelding $R_D : V \to V$ gedefinieerd als $R_D(A) = AD$. Verder is de afbeelding $R : V \to \mathcal{L}(V)$ gedefinieerd door $R(D) = R_D$ (hierbij is $\mathcal{L}(V)$ de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van V naar zichzelf).

a. Laat zien dat R een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Toon aan dat $\ker(R) = \{0\}$. (3 pt)

c. Ga na of R inverteerbaar is. (3 pt)

d. Voor $D \in V$ is $(R_D)^*$ de geadjungeerde afbeelding van R_D. Bewijs dat $(R_D)^* = R_{D^*}$. (4 pt)

e. Zij $D \in V$. Bewijs dat D en R_D dezelfde eigenwaarden hebben. (4 pt)

Antwoorden.

1a. Een orthonormale basis van V is $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$.

b. Een geschikte orthonormale basis is $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$. T.o.v. deze basis is de matrix van A

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

c. De matrix van A t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E}$ is

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

waarbij de basistransformatiematrix $B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ de matrix is met als kolomvectoren de vectoren van de orthonormale basis $\mathcal{B}$ en $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^T$.

2a. Merk op dat $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* B \mathbf{y}$ met $B = \begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 3\end{pmatrix}$. $B = B^*$ dus B is hermites, en de matrix B is positief definiet (heeft twee positieve eigenwaarden), dus $B(\ ,\ )$ is sesquilineair, hermites en positief-definiet en dus een inproduct.

b. We passen Gram-Schmidt toe op de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (met het gegeven inproduct):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{B(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2)}{B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

Delen door de norm $\|\mathbf{a}\| = B(\mathbf{a}, \mathbf{a})^{1/2}$ geeft een orthonormaal stelsel:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

3a. Het karakteristieke polynoom is $-(X-1)^3(X-2)^2$. Verder is de rang van $A-I$ gelijk aan 3, de rang van $A-2I$ is 4. Er zijn dus twee Jordanblokken bij e.w. 1 en er is er een bij e.w. 2; een Jordan-normaalvorm is dan gelijk aan $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Het minimumpolynoom is $(X-1)^2(X-2)^2 = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4$.

c. Uit (b) volgt dat $A^4 - 6A^3 + 13A^2 - 12A + 4I = O$ en dus is $A^{-1} = -\frac{1}{4}A^3 + \frac{3}{2}A^2 - \frac{13}{4}A + 3I$.

4a. Als p, q polynomen in P_n zijn zodanig dat $p(1) = p'(1) = q(1) = q'(1) = 0$ dan geldt, voor $a, b \in \mathbf{C}$:

$$(ap + bq)(1) = ap(1) + bq(1) = 0, \quad (ap + bq)'(1) = ap'(1) + bq'(1) = 0.$$

b. We tonen eerst aan dat $\{1, (X-1), \ldots, (X-1)^k\}$ lineair onafhankelijk zijn voor alle $0 \leq k \leq n$. We gebruiken volledige inductie naar k: voor $k = 0$ duidelijk. Stel het is waar voor $k < K$. Neem aan dat

$$c_0 + c_1(X-1) + \ldots + c_K(X-1)^K = 0$$

voor zekere $c_0, \ldots, c_K \in \mathbf{C}$. Uitschrijven in machten van X geeft

$$0 = c_K X^K + \text{ lagere machten van } X.$$

Omdat $1, X, \ldots, X^K$ lineair onafhankelijk zijn volgt dat $c_K = 0$, maar dan volgt uit de lineaire onafhankelijkheid van $1, \ldots, (X-1)^{K-1}$ dat ook $c_0 = \ldots = c_{K-1} = 0$. Dus zijn $1, \ldots, (X-1)^K$ lineair onafhankelijk.

Omdat $\dim P_n = n+1$, is $\{1, X-1, \ldots, (X-1)^n\}$ een maximaal lineair onafhankelijk stelsel en dus een basis van P_n. Laat nu $p \in P_n$. Dan is $p(X) = b_0 + b_1(X-1) + \ldots + b_n(X-1)^n$ voor zekere $b_0, \ldots, b_n$. Nu is $p(0) = b_0$ en $p'(0) = b_1$. Dus $p \in U$ dan en slechts dan als $b_0 = b_1 = 0$ dus $U = \text{span}\{(X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\}$. Maar $\{(X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\}$ is een lineair onafhankelijk stelsel (als deelstelsel van $\{1, \ldots, (X-1)^n\}$) en dus een basis van U.

(Een iets korter antwoord is het volgende: omdat $p(1) = p'(1) = 0$ twee onafhankelijke lineaire condities zijn is $\dim(U) = n+1-2 = n-1$. Een lineair onafhankelijk stelsel bestaande uit $n-1$ polynomen die in U liggen vormt dus een basis van U. Lineaire onafhankelijkheid aantonen gaat als boven.)

c. Uit (b) volgt dat $\dim(W) + \dim(U) = 2 + (n-1) = n+1 = \dim P_n$. Verder is $U \cap W = \{0\}$: immers als $q \in W$ dan is $q(X) = a_1 X + a_0$ en uit $q(1) = q'(1) = 0$ volgt dat $a_0 = a_1 = 0$. Maar dan is $P_n = U \oplus W$.

d. Omdat $\pi(X^k) = kX + (1-k)$, is de matrix van π gelijk aan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \ldots & 1-n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

e. π is lineair (dit is gegeven) en $\pi = \pi^2$ dus π is een projectie. Verder is $\text{im}(\pi) = W$ en $\ker(\pi) = U$. Dus π is een projectie op U langs W.

5a. Laat $C, D \in V$ en $a, b \in \mathbf{C}$. Dan is, voor $A \in V$ willekeurig,

$$R(aC+bD)(A) = R_{aC+bD}(A) = A(aC+bD) = aAC+bAD = aR_C(A)+bR_D(A) = (aR(C)+bR(D))(A)$$

dus $R(aC+bD) = aR(C)+bR(D)$.

b. Zij $C \in \ker(R)$. Dan is $R_C = O$ d.w.z. $R_C(A) = AC = O$ voor alle $A \in V$. I.h.b. is $R_C(I) = C = O$.

c. Als R inverteerbaar is, dan is R een vectorruimte-isomorfisme en dus zijn V en $\mathcal{L}(V)$ isomorfe vectorruimten. Maar $\dim(V) = n < n^2 = \dim \mathcal{L}(V)$, tegenspraak.

Het is ook mogelijk om een tegenvoorbeeld te geven. Zo is de afbeelding $A \to CAC^{-1}$ voor een vaste (inverteerbare) $C \in V$ een afbeelding in $\mathcal{L}(V)$. Er is echter geen $D \in V$ zodanig dat $CAC^{-1} = AD$ voor alle $A \in V$. Immers $A = I$ nemen geeft $D = I$, maar i.h.a. is $CAC^{-1} \neq A$.

d. Laat $A, B, D \in V$. Dan is

$$(A, R_D(B)) = \operatorname{tr}(A^* R_D(B)) = \operatorname{tr}(A^*BD) = \operatorname{tr}(DA^*B) = \operatorname{tr}((AD^*)^*B) = (AD^*, B).$$

Maar dan is $(R_D)^*(A) = AD^* = R_{D^*}(A)$.

e. Laat $D \in V$ en $\lambda \in \mathbf{C}$. Dan geldt:

λ is een eigenwaarde van $D \iff \det(D - \lambda I) = 0 \iff$ De matrix $D - \lambda I$ is niet-inverteerbaar $\iff$ er is een $A \in V, A \neq O$ zodanig dat $A(D - \lambda I) = O \iff$ er is een $A \in V$, $A \neq O$ zodanig dat $R_D(A) = \lambda A \iff \lambda$ is een eigenwaarde van R_D.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
donderdag 11 januari 2007, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.
Grafische rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone, niet-programmeerbare, wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

1. Laat $\ell \subset \mathbf{R}^3$ de lijn zijn die wordt opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $\ell^\perp$. (4 pt)

Zij $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de rotatie in $\mathbf{R}^3$ met ℓ als rotatieas en π als rotatiehoek.

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en bepaal de matrix van A t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van A t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

2. Beschouw in $\mathbf{R}^2$ de bilineaire vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ , \ )$ een inwendig product op $\mathbf{R}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{R}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ , \ )$. (10 pt)

3. Gegeven is de matrix $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 & -6 \\ 4 & 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van C en geef voor iedere eigenwaarde een basis van de bijbehorende eigenruimte. Geef tevens de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van iedere eigenwaarde. (8 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van C en geef tevens het minimumpolynoom van C. (10 pt)

Zie de ommezijde van deze pagina voor de overige opgaven.

4. Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices voorzien van het inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^*B)$. Laat U een vaste unitaire $n \times n$-matrix zijn en definieer de lineaire afbeelding $\psi : V \to V$ door $\psi(A) = UA$.

a. Laat zien dat ψ een unitaire afbeelding is. (4 pt)

Laat $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van U zijn in $\mathbf{C}^n$. Definieer de matrices A_{ij} voor $i, j = 1, 2, \ldots, n$ d.m.v.

$$A_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ \mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0})$$

waarbij $\mathbf{a}_j$ in de i-e kolom staat (en de andere kolomvectoren de nulvector zijn).

b. Toon aan dat A_{ij} een eigenvector is van ψ. (4 pt)

c. Toon aan dat de matrices A_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ een orthonormale basis van eigenvectoren van ψ vormen. (6 pt)

d. Laat χ_U en χ_ψ de karakteristieke polynomen zijn van U resp. ψ. Leg uit waarom $\chi_\psi(x) = \chi_U(x)^n$. (4 pt)

5. Laten $x_1, \ldots, x_n$ verschillende reële getallen zijn. Zij $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en laat W de vectorruimte zijn van alle reële functies $f : S \to \mathbf{R}$, met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

a. Laat zien dat W n-dimensionaal is. (5 pt)

Zij P_{n-1} de vectorruimte van alle polynomen $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ van graad hoogstens $n-1$ met reële coëfficiënten a_j en met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer de (restrictie)afbeelding Res: $P_{n-1} \to W$ door

$$(\mathrm{Res}\ p)(x_k) = p(x_k) \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, n.$$

b. Laat zien dat Res een lineaire afbeelding is. (4 pt)

c. Toon aan dat Ker Res $= \{0\}$. (4 pt)

d. Bewijs dat er voor iedere keuze van reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ precies één polynoom p van graad hoogstens $n-1$ is, zodanig dat $p(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$. (5 pt)

Antwoorden.

1a. Een orthonormale basis van $\ell^\perp$ is $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$.

b. Een geschikte orthonormale basis is $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$. T.o.v. deze basis is de matrix van A

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

c. De matrix van A t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E}$ is

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

waarbij de basistransformatiematrix $B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ de matrix is met als kolomvectoren de vectoren van de orthonormale basis $\mathcal{B}$ en $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (B_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^T$.

2a. Merk op dat $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{y}$ met $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. $B = B^T$ dus B is symmetrisch, en de matrix B is positief definiet (heeft twee positieve eigenwaarden), dus $B(\ ,\ )$ is bilineair, symmetrisch en positief-definiet en dus een inproduct.

b. We passen Gram-Schmidt toe op de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (met het gegeven inproduct):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{B(\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_1)}{B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

Delen door de norm geeft een orthonormaal stelsel:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.$$

3a. Het karakteristieke polynoom is $(X-2)^4$, de enige eigenwaarde is dus 2 met algebraïsche multipliciteit 4 en meetkundige multipliciteit 2: de eigenruimte $\mathrm{Ker}(C - 2I)$ wordt opgepannen door de 2 vectoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\\3\\5\end{pmatrix}$.

b. Uit een berekening volgt dat rang$(C-2I)^2 = 1$, dus rang$(C-2I)$ - rang$(C-2I)^2 = 1$; er zijn dus twee Jordanblokken (2 is de dimensie van de eigenruimte) en 1 Jordanblok van afmeting minstens 2. Een Jordan-normaalvorm is dus $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Het minimumpolynoom is $(X-2)^3$: de grootste afmeting van de Jordanblokken bij e.w. 2 is immers gelijk aan 3.

4a. Omdat $U^*U = I$ is

$$(\psi(A), \psi(B)) = \mathrm{tr}(A^*U^*UB) = \mathrm{tr}(A^*B) = (A, B)$$

dus ψ is unitair.

b.

$$UA_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ U\mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}) = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ \lambda_j \mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0}) = \lambda_j A_{ij}.$$

c.

$$A_{ij}^* A_{k\ell} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^* \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{a}_\ell & \ldots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell E_{ik}$$

waarbij E_{ik} de matrix is met 1 in de i-e rij en k-e kolom en verder nullen. (Hierbij is δ_{ij} het Kronecker-symbool dus $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en 0 als $i \neq j$). Nu is, aangezien $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis is van $\mathbf{C}^n$,

$$(A_{ij}, A_{k\ell}) = \mathrm{tr}(A_{ij}^* A_{k\ell}) = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell \cdot \mathrm{tr}(E_{ik}) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

dus $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ is een orthonormaal stelsel in V.

Alternatief:

$$(A_{ij}, A_{k\ell}) = \mathrm{tr}(A_{ij}^* A_{k\ell}) = \sum_{p,q=1}^{n} (\overline{A_{ij}})_{pq} (A_{k\ell})_{pq} = \sum_{p,q=1}^{n} \delta_{iq}\delta_{kq} (\overline{\mathbf{a}_j})_p (\mathbf{a}_\ell)_p = \delta_{ik} \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_\ell = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

Dit orthonormale stelsel is tevens een basis omdat een orthonormaal stel lineair onafhankelijk is en er precies $n^2 = \dim(V)$ matrices A_{ij} zijn.

d. Met elke eigenvector $\mathbf{a}_j$ van U corresponderen n eigenvectoren A_{ij} $(i = 1, \ldots, n)$ van ψ met dezelfde eigenwaarde λ_j. De multipliciteit van de eigenwaarde λ van ψ is dus n keer zo groot als de multipliciteit van de eigenwaarde λ bij U. Dus is

$$\chi_\psi(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^n = \left(\prod_{j=1}^{n} (-1)^n (X - \lambda_j) \right)^n = \chi_U(X)^n.$$

5a. Laat $T : W \to \mathbf{R}^n$ de afbeelding zijn gegeven door $T(f) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. T is lineair en inverteerbaar.

Dus is $\dim(W) = \dim(\mathbf{R}^n) = n$.

Alternatief: Laat $f_i : S \to \mathbf{R}$ gegeven zijn door $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Als $f \in W$, dan is $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) f_i$ dus W wordt opgespannen door $f_1, \ldots, f_n$. Verder zijn de functies f_i lineair onafhankelijk, nl. uit $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ volgt dat

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

voor $j = 1, \ldots, n$. De conclusie is dat $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een basis vormt van W dus $\dim(W) = n$.

b. Ga na dat $\mathrm{Res}(p + q) = \mathrm{Res}(p) + \mathrm{Res}(q)$ en ook $\mathrm{Res}(\lambda p) = \lambda \mathrm{Res}(p)$ voor $\lambda \in \mathbf{R}$.

c. Zij p een polynoom van graad hoogstens $n - 1$ zodanig dat $\mathrm{Res}(p) = 0$; dan is $p(x_k) = 0$ voor $k = 1, \ldots, n$. Het polynoom p heeft dus minstens n nulpunten en dit is alleen mogelijk als $p = 0$.

d. Volgens de dimensiestelling is rang(Res)+dim Ker(Res)=dim(P_{n-1})=n. Volgens (c) is de rang van Res gelijk aan $n = \dim(W)$ en dus is Res surjectief. Omdat Res ook injectief is volgens (c), is Res een bijectieve lineaire afbeelding. Nu is er precies één functie f in W zodanig dat $f(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$, dus is er ook precies één polynoom $p \in P_{n-1}$ zodanig dat $p(x_k) = c_k$, nl. $f = \mathrm{Res}(p)$.