Tentamen Lineaire Algebra 2NA

dinsdag 23 maart 2010, 10.00-13.00.

Beargumenteer in elk onderdeel je antwoord.

1. De afbeelding $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een orthogonale projectie op de lijn $\ell = \text{span}\{(1, 1, -1)^T\}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van P en geef de bijbehorende eigenwaarden. (8 pt)

b. Bereken de standaardmatrix van P. (6 pt)

2. De kwadratische vorm Q op $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2,$$

waarbij $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

a. Ga na of de kwadratische kromme K met vergelijking $Q(\mathbf{x}) = 1$ een ellips, een hyperbool dan wel ontaard is. (4 pt)

b. Bepaal de symmetrieassen (= hoofdassen) van K. (7 pt)

c. Teken K. (4 pt)

3. Beschouw het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = 2y(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t)$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Het stelsel kan worden geschreven als een enkele vector-differentiaalvergelijking $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ waarbij A een constante matrix is en $\mathbf{x}(t)$ een vector.

a. Geef de matrix A. (1 pt)

b. Bereken de matrix e^{tA} voor $t \in \mathbb{R}$. (8 pt)

c. Bepaal nu de oplossingen $x(t), y(t)$ van het stelsel met de gegeven beginvoorwaarden. (3 pt)

De laatste twee opgaven staan op de ommezijde.

4. P_4 is de vectorruimte van complexe polynomen van graad hoogstens 4. De afbeelding $T : P_4 \to P_4$ beeldt een polynoom $p(x)$ af op $p(x+1)$. Zo is $T(x^2) = (x+1)^2$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (2 pt)

b. Bepaal de matrix van T t.o.v. een zelfgekozen basis van P_4. (4 pt)

c. Bepaal de eigenwaarden van T en geef hun algebraïsche en meetkundige multipliciteit. (4 pt)

5. V is de vectorruimte van oneindige rijtjes complexe getallen $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ met componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging en waarvoor geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ convergeert. Op V wordt een inwendig product gedefinieerd door

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} w_n.$$

Zij verder $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ een vast rijtje complexe getallen en laat de lineaire afbeelding $U : V \to V$ gegeven zijn door

$$U(z_1, z_2, \ldots) = (u_1 z_1, u_2 z_2, \ldots).$$

a. Toon aan dat U een normale afbeelding is. (6 pt)

b. Voor welke rijtjes $\mathbf{u}$ is U een unitaire afbeelding? (3 pt)

c. Welke eigenwaarden heeft U? (4 pt)

******* EINDE *******

Antwoorden.

1a. Eigenvectoren zijn $(1,1,-1)^T$ met eigenwaarde 1 en $(1,-1,0)^T$, $(1,0,1)^T$ met eigenwaarde 0. Een orthonormale basis van eigenvectoren is

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)^T.$$

b. De standaardmatrix is gelijk aan

$$UDU^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2a. Hyperbool (de eigenwaarden van de bijbehorende symmetrische matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ zijn $7, -3$).

b. De richtingen van de symmetrieassen worden gegeven door de eigenvectoren van de matrix A. De hoofdassen zijn dus $-2x_1 + x_2 = 0$ en $x_1 + 2x_2 = 0$.

c. Maak een duidelijke tekening.

3a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b.

$$e^{tA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & -2e^{-t} + 2e^{2t} \\ -e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

c. $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ dus

$$x(t) = y(t) = e^{2t}.$$

4a. $T(p+q)(x) = (p+q)(x+1) = p(x+1)+q(x+1) = Tp(x)+Tq(x)$ en $T(\lambda p)(x) = \lambda p(x+1) = \lambda Tp(x)$.

b. De matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ is

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Het karakteristieke polynoom is gelijk aan $(X-1)^5$. De enige eigenwaarde is 1 met algebraïsche multipliciteit 5. De meetkundige multipliciteit is 1: er is op een constante factor na maar één eigenvector nl. $p(x) = 1$.

5a. De hermites geadjungeerde van U is

$$U^*(\mathbf{z}) = (\overline{u_1}z_1, \overline{u_2}z_2, \ldots).$$

Immers

$$\langle \mathbf{w}, U\mathbf{z} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{w_n} z_n = \overline{\overline{u_n} w_n} z_n = \langle U^*\mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle.$$

Nu is

$$U^*U\mathbf{z} = UU^*\mathbf{z} = (|u_1|^2 z_1, |u_2|^2 z_2, \ldots).$$

b. U is unitair als voor alle $\mathbf{z}$ geldt dat $U^*U\mathbf{z} = \mathbf{z}$. Dit is het geval als alle u_n modulus 1 hebben.

c. $U\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ geeft $u_n z_n = \lambda z_n$ voor alle n. Omdat $z_n \neq 0$ voor minstens een n, is $\lambda = u_n$. Omgekeerd is u_n ook een eigenwaarde van U met eigenvector $(\delta_{1n}, \delta_{2n}, \ldots)$.