Tentamen Lineaire Algebra 2NA

dinsdag 23 maart 2010, 10.00-13.00.

Beargumenteer in elk onderdeel je antwoord.

1. De afbeelding $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een orthogonale projectie op de lijn $\ell = \text{span}\{(1, 1, -1)^T\}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van P en geef de bijbehorende eigenwaarden. (8 pt)

b. Bereken de standaardmatrix van P. (6 pt)

2. De kwadratische vorm Q op $\mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als

$$Q(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 6x_3^2,$$

waarbij $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

a. Laat zien dat het kwadratische oppervlak $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $Q(\mathbf{x}) = 1$ een ellipsoïde is en bepaal de lengte van de hoofdassen van E. Geef hierbij een korte uitleg. (8 pt)

b. Bepaal de minimale en de maximale waarde die $Q(\mathbf{x})$ aanneemt voor $\|\mathbf{x}\| = 5$. (4 pt)

3. Beschouw het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = 2y(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t)$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Het stelsel kan worden geschreven als een enkele vector-differentiaalvergelijking $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ waarbij A een constante matrix is en $\mathbf{x}(t)$ een vector.

a. Geef de matrix A. (1 pt)

b. Bereken de matrix e^{tA} voor $t \in \mathbb{R}$. (8 pt)

c. Bepaal nu de oplossingen $x(t), y(t)$ van het stelsel met de gegeven beginvoorwaarden. (3 pt)

De laatste twee opgaven staan op de ommezijde.

4. P_4 is de vectorruimte van complexe polynomen van graad hoogstens 4. De afbeelding $T : P_4 \to P_4$ beeldt een polynoom $p(x)$ af op $p(x+1)$. Zo is $T(x^2) = (x+1)^2$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (2 pt)

b. Bepaal de matrix van T t.o.v. een zelfgekozen basis van P_4. (4 pt)

c. Bepaal de eigenwaarden van T en geef hun algebraïsche en meetkundige multipliciteit. (4 pt)

5. V is de vectorruimte van oneindige rijtjes complexe getallen $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ met componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging en waarvoor geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ convergeert. Op V wordt een inwendig product gedefinieerd door

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} w_n.$$

Zij verder $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ een vast rijtje complexe getallen en laat de lineaire afbeelding $U : V \to V$ gegeven zijn door

$$U(z_1, z_2, \ldots) = (u_1 z_1, u_2 z_2, \ldots).$$

a. Toon aan dat U een normale afbeelding is. (6 pt)

b. Voor welke rijtjes $\mathbf{u}$ is U een unitaire afbeelding? (3 pt)

c. Welke eigenwaarden heeft U? (4 pt)

******* EINDE *******