Tentamen Lineaire Algebra 2NA, 05-01-2010

Antwoorden.

1a. Laat $\tilde{U}$ de matrix van U zijn t.o.v. de gegeven basis. Omdat de basis orthonormaal is, is U unitair dan en slechts dan als $\tilde{U}$ unitair is. Nu is $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ en deze matrix is unitair omdat de kolomvectoren orthonormaal zijn.

b. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 = i$ en heeft oplossingen $\lambda_1 = e^{i\pi/4}$ en $\lambda_2 = -e^{i\pi/4}$. De bijbehorende eigenvectoren zijn orthogonaal (omdat U unitair is) en een orthonormaal stelsel is

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + e^{i\pi/4}|-\rangle), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - e^{i\pi/4}|-\rangle).$$

2. $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

a. A heeft eigenwaarden $d_1 = 7$, $d_2 = 10$ en $d_3 = 15$. Omdat alle eigenwaarden positief zijn, is A positief-definiet en het kwadratisch oppervlak $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ is een ellipsoïde. De lengten van de hoofdassen zijn $2/\sqrt{d_1} = 2/\sqrt{7}$, $2/\sqrt{d_2} = 2/\sqrt{10}$ en $2/\sqrt{d_3} = 2/\sqrt{15}$.

b. Op $\|\mathbf{x}\| = 1$ worden het minimum en maximum van $Q(\mathbf{x})$ gegeven door de kleinste resp. grootste eigenwaarde, dus 7 resp. 15. Op $\|\mathbf{x}\| = 2$ zijn het minimum en maximum dus 28, resp. 60.

3a. $U = \ker(P)$ en $W = \mathrm{im}(P)$. Omdat $W \neq U^\perp$ is, is de projectie niet orthogonaal.

b. Kies als basis $\mathcal{B}$ de vereniging van een basis van U en een basis van W, dus bijvoorbeeld

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

De matrix van P t.o.v. $\mathcal{B}$ is dan $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. De matrix t.o.v de standaardbasis is

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4a. $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Diagonaliseer A eerst:

$$A = UDU^{-1} = \frac{1}{3i} \begin{pmatrix} 3i/2 & -3i/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6i & 0 \\ 0 & -6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3i/2 \\ -1 & 3i/2 \end{pmatrix}.$$

Hier is U een matrix van eigenvectoren en D bevat de bijbehorende eigenwaarden. Dan is

$$e^{tA} = Ue^{tD}U^{-1} = \frac{1}{3i} \begin{pmatrix} 3i/2 & -3i/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6it} & 0 \\ 0 & e^{-6it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3i/2 \\ -1 & 3i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 6t & -\frac{3}{2}\sin 6t \\ \frac{2}{3}\sin 6t & \cos 6t \end{pmatrix}.$$

Alternatieve methode: Omdat $A^2 = -36I$, is $A^{2m} = (-1)^m 6^{2m} I$ en $A^{2m+1} = (-1)^m 6^{2m} A$. Dan is

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (6t)^{2m}}{2m!} \cdot I + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (6t)^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot \frac{1}{6} A = \cos 6t I + \frac{1}{6} \sin 6t A.$$

c. $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dit geeft

$$x(t) = \cos 6t - \frac{3}{2} \sin 6t, \quad y(t) = \frac{2}{3} \sin 6t + \cos 6t.$$

5. Als we als basis kiezen

$$\{A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\},$$

dan is de matrix van T_D t.o.v. deze basis $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Immers is $T_D(A_1) = DA_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} = A_1 + 2A_3$ etc.

b. Voor willekeurige $X, Y \in \mathcal{M}_n$ is

$$(X, T_D(Y)) = (X, DY) = \mathrm{tr}(X^*DY) = \mathrm{tr}((D^*X)^*Y) = (D^*X, Y)$$

en dus is $(T_D)^*(X) = D^*X$ voor $X \in \mathcal{M}_n$.

c. T_D is normaal dan en slechts dan als $T_D(T_D)^* = (T_D)^*T_D$. Dit is het geval als voor willekeurige $X \in \mathcal{M}_n$

$$DD^*X = D((T_D)^*X) = T_DT_D^*X = (T_D)^*T_DX = (T_D)^*DX = D^*DX$$

dus als $DD^* = D^*D$.

d. Zij μ een eigenwaarde is van D met eigenvector $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_n$. Laat X de matrix $(\mathbf{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ zijn (dus de matrix met $\mathbf{b}$ in de eerste kolom en nul in de andere kolommen). Dan is

$$T_D(X) = DX = (D\mathbf{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = (\mu\mathbf{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mu X$$

dus μ is eigenwaarde van T_D. (Een andere keuze van X, bijv. waarbij de vector $\mathbf{b}$ niet in de eerste, maar in een van de andere kolommen staat, geeft ook een eigenvector van T_D.)

Omgekeerd, als μ eigenwaarde is van T_D met eigenmatrix X, dan is $DX = \mu X$ en $X \neq O$. Minstens een van de kolommen van X is niet nul, zeg de j-de kolom $\mathbf{x}_j$. Dan is $D\mathbf{x}_j = \mu\mathbf{x}_j$, dus μ is eigenwaarde van D.