Tentamen Lineaire Algebra 2NA

dinsdag 5 januari 2010, 10.00-13.00.

Beargumenteer in elk onderdeel je antwoord.

1. V is een tweedimensionale complexe vectorruimte voorzien van een inwendig product, met een orthonormale basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. De lineaire afbeelding $U : V \to V$ wordt gegeven door

$$U|+\rangle = i|-\rangle, \quad U|-\rangle = |+\rangle.$$

a. Toon aan dat U een unitaire afbeelding is. (6 pt)

b. Bepaal de eigenwaarden en een orthonormaal stelsel van eigenvectoren van U in V. (8 pt)

2. De kwadratische vorm Q op $\mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als

$$Q(\mathbf{x}) = 14x_1^2 - 4x_1x_3 + 7x_2^2 + 11x_3^2,$$

waarbij $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

a. Laat zien dat het kwadratische oppervlak $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $Q(\mathbf{x}) = 1$ een ellipsoïde is en bepaal de lengte van de hoofdassen van E. (8 pt)

b. Wat is de minimale en de maximale waarde die $Q(\mathbf{x})$ aanneemt voor $\|\mathbf{x}\| = 2$? (4 pt)

3. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ met standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. De lineaire deelruimte U is het opspansel van de vector $(1, 1, 0)^T$. W is het vlak met vergelijking $x_1 + x_3 = 0$. $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op W langs U.

a. Is P een orthogonale projectie? (2 pt)

b. Bepaal een basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^3$ zodanig dat de matrix van P t.o.v. $\mathcal{B}$ een zo eenvoudig mogelijke vorm heeft. Geef tevens de matrix van P t.o.v. deze basis. (4 pt)

c. Bepaal de matrix van P t.o.v. de standaardbasis. (7 pt)

De laatste twee opgaven staan op de ommezijde.

4. Beschouw het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = -9y(t), \quad y'(t) = 4x(t)$$

met beginvoorwaarden $x(0) = y(0) = 1$.

Het stelsel kan worden geschreven als een enkele vector-differentiaalvergelijking $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ waarbij A een constante matrix is en $\mathbf{x}(t)$ een vector.

a. Geef zowel A als $\mathbf{x}(t)$. (1 pt)

b. Bereken de matrix e^{tA} voor $t \in \mathbb{R}$. (8 pt)

c. Bepaal nu de oplossingen $x(t), y(t)$ van het stelsel met de gegeven beginvoorwaarden. (3 pt)

5. $\mathcal{M}_n$ is de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices met inwendig product $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^*Y)$. Voor een willekeurige, maar verder vaste matrix $D \in \mathcal{M}_n$ definiëren we de lineaire afbeelding $T_D : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ door $T_D(X) = DX$.

a. Laat eerst $n = 2$ en $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ zijn. Geef de matrix van T_D t.o.v. een zelfgekozen basis van $\mathcal{M}_2$. (5 pt)

In de rest van de opgave zijn n en $D \in \mathcal{M}_n$ willekeurig.

b. Toon aan dat de hermites geadjungeerde afbeelding $(T_D)^*$ wordt gegeven door $(T_D)^*(X) = D^*X$. (4 pt)

c. Bewijs: T_D is een normale afbeelding dan en slechts dan als D een normale matrix is. (2 pt)

d. Bewijs: $\mu \in \mathbb{C}$ is een eigenwaarde van T_D dan en slechts dan als μ een eigenwaarde van D is. (6 pt)