Antwoorden Lineaire Algebra 2NA van 4-1-2011

1. De eigenwaarden van de met Q geassocieerde matrix zijn 6 en 3 met eigenvectoren $(\sqrt{2}, 1)^T$ en $(-1, \sqrt{2})^T$. De hoofdassenvorm (=principal axis form) is $2y_1^2 + y_2^2 = 1$ en de y_1-resp. y_2-as liggen in de richtingen van de gegeven eigenvectoren. K is een ellips met hoofdassen langs de y_1-as en y_2-as - omdat de e.w. beide positief zijn is Q positief-definiet en vanwege de $+1$ in het rechterlid is de kromme niet-gedegenereerd.

c. Bij het tekenen moeten de hoofdassen en de snijpunten met de hoofdassen duidelijk te zien zijn.

2. De eigenwaarden van de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ zijn $-1+i$ en $-1-i$ met eigenvectoren $(1, -1+i)^T$ en $(1, -1-i)^T$. De oplossing wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} = Ue^{tD}U^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Hierbij is $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$ een matrix van eigenvectoren en $e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t})$.

Opmerking: Het is handiger om niet de hele matrix e^{tA} uit te rekenen maar de vector $(1, -1)^T$ achtereenvolgens met de matrices U^{-1}, e^{tD}, U te vermenigvuldigen.

3a. $T(A+B) = (A+B)J - J(A+B) = AJ - JA + BJ - JB = T(A) + T(B)$, net zo $T(\lambda A) = \lambda T(A)$.

b. T.o.v. de basis $\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ is de matrix van T gelijk aan $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Methode 1: de matrix $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ is antihermites, de basis $\mathcal{E}$ is orthonormaal (dit moet dan wel worden aangetoond!), dus de afbeelding T is zelf antihermites.

Methode 2: Via de definitie: $\langle T(A), B\rangle = \mathrm{tr}((AJ - JA)^* B) = \mathrm{tr}(J^* A^* B)$ - $\mathrm{tr}(A^* J^* B) =$

$$= \mathrm{tr}(-A^* BJ) - \mathrm{tr}(-A^* JB) = \mathrm{tr}(A^*(JB - BJ)) = \langle A, -T(B)\rangle.$$

Hierbij is gebruikt dat $J^* = -J$ en $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.

d. Direct: $T(B) = BJ - JB = 2iB$ berekenen. Het is ook mogelijk om de coördinaatvector $B_{\mathcal{E}} = (1, i, i, -1)^T$ met de matrix uit (b) te vermenigvuldigen.

e. Omdat de matrix van T reëel is, is $T(\bar{B}) = -2i\bar{B}$. Verder zien we aan de matrix dat de rang 2 is, en dus is er een eigenwaarde 0 met eigenruimte van dimensie 2: de eigenruimte is span$\{I, J\}$.

4a. Neem aan dat $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}$; inproducten nemen met $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geeft een stelsel van drie vergelijkingen in de onbekenden λ, μ en ν: Een van deze vergelijkingen is

$$0 = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}\rangle = \lambda + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu,$$

de andere twee zijn $\frac{1}{2}\lambda + \mu + \frac{1}{2}\nu = 0$ en $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu + \nu = 0$. De oplossing van dit stelsel is (alleen) $\lambda = \mu = \nu = 0$. Dus zijn $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineair onafhankelijk. Omdat het aantal vectoren gelijk is aan de dimensie van de vectorruimte, vormt het een basis.

b. Gram-Schmidt toepassen geeft $\{\mathbf{a}, (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})/\sqrt{3}\}$.

c. Gram-Schmidt toepassen geeft $\{(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c})/\sqrt{6}\}$.

d. De matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dat $P(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ en $P(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ is duidelijk. Verder is

$$P(\mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle\mathbf{a} + \frac{1}{3}\langle \mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}.$$

5. $(U^{-1})^T U^T = (UU^{-1})^T = I^T = I$ dus $(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$ (hierbij is gebruikt dat $(AB)^T = B^T A^T$ voor matrices A, B waarvoor AB bestaat).