Tentamen Lineaire Algebra 2NA

dinsdag 4 januari 2010, 10.00-13.00.

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering.

1. De kwadratische vorm Q op $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_2^2,$$

waarbij $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

a. Ga na of de kwadratische kromme K met vergelijking $Q(\mathbf{x}) = 3$ een ellips, een hyperbool, dan wel ontaard is. (4 pt)

b. Bepaal de symmetrieassen (= hoofdassen) van K. (4 pt)

c. Teken K. (4 pt)

2. Beschouw het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) &= \quad y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 1, y(0) = -1$.

Het stelsel kan worden geschreven als een enkele vector-differentiaalvergelijking $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ waarbij A een constante matrix is en $\mathbf{x}(t)$ een vector.

a. Geef de matrix A. (1 pt)

b. Bepaal nu de oplossingen $x(t), y(t)$ van het stelsel met de gegeven beginvoorwaarden. Gebruik hierbij de e-macht van een geschikte matrix. (10 pt)

De rest van de opgaven staat op de ommezijde van dit vel.

3. Gegeven is de vectorruimte $\mathcal{M}_2$ van complexe 2×2-matrices met inwendig product $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^* Y)$. Verder is gegeven de matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beschouw nu de afbeelding $T : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ gedefinieerd door $T(A) = AJ - JA$ (waarbij uiteraard A een matrix in $\mathcal{M}_2$ is).

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Geef de matrix van T t.o.v. een zelfgekozen basis in $\mathcal{M}_2$. (5 pt)

c. Bewijs dat $T^* = -T$. (4 pt)

d. Ga na dat $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ een eigenvector van T is en bepaal de eigenwaarde. (3 pt)

e. Bepaal ook de andere eigenwaarden en eigenvectoren van T. (8 pt)

4. In $\mathbb{C}^3$ (met het standaard-inproduct) zijn gegeven de eenheidsvectoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$. Voor de onderlinge inproducten geldt dat

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{2}.$$

a. Bewijs dat $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ een basis van $\mathbb{C}^3$ vormt. (6 pt)

W is de lineaire deelruimte die wordt opgespannen door de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

b. Bepaal een orthonormale basis van W. (4 pt)

c. Bepaal een orthonormale basis van $W^\perp$. (3 pt)

d. P_W is de orthogonale projectie op W. Bepaal de matrix van P_W t.o.v. de basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. (6 pt)

5. Zij U een inverteerbare $n \times n$-matrix met complexe coëfficiënten.

a. Bewijs dat $(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$. (4 pt)