Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Dinsdag 10 april 2012, 10.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering.

Voor dit tentamen kunnen 60 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij (minstens) 33 punten.

---

1. In $\mathbf{R}^4$ is W het opspansel van de vectoren $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

a. Bepaal een basis van $W^{\perp}$. (3 pt)

b. Bepaal een orthonormale basis van W. (4 pt)

c. $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is de orthogonale projectie op W. Bepaal de standaardmatrix van P_W. (5 pt)

d. Bepaal de orthogonale projectie van $\mathbf{v} = (0, -2, 1, 1)^T$ op $W^{\perp}$. (3 pt)

2. Beschouw de sesquilineaire vorm op $\mathbb{C}^3$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\overline{x_1}y_1 + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 + 2\overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3.$$

Hierbij zijn x_1, x_2, x_3 en y_1, y_2, y_3 de coördinaten van $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$.

a. Bepaal een matrix B zodanig dat $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* B\mathbf{y}$. (3 pt)

b. Voor welke $a \in \mathbb{C}$ is $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ een inwendig product? (4 pt)

c. Kies $a = 0$. Bepaal de minimale en maximale waarde van $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ voor $\mathbf{x}$ op de eenheidsbol $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1$. (5 pt)

3. De matrix $R = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ a & 0 & b\\ c & d & f\end{pmatrix}$ is de standaardmatrix van een rotatie in $\mathbb{R}^3$ om een as door de oorsprong. a, b, c, d, f zijn reële getallen en verder is gegeven dat $a > 0$.

a. Bepaal de getallen a, b, c, d, e. (5 pt)

b. Er zijn twee mogelijke waarden voor de draaiingshoek. Geef deze waarden. (3 pt)

c. Ga na of, gezien vanuit een punt op de positieve z-as, de draaiing tegen de klok in of met de klok mee gaat. (3 pt)

4. Laat C de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ zijn.

a. Bereken de matrix e^{tC} voor $t \in \mathbb{R}$. (8 pt)

b. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$x'(t) = x(t) - y(t), \quad y'(t) = x(t) + y(t).$$

Bepaal de oplossing $(x(t), y(t))$ van het stelsel waarvoor geldt dat $x(0) = 1$ en $y(0) = 1$. (2 pt)

5. Zij $V = \mathcal{M}at(n \times n, \mathbb{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices voorzien van het inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^*B)$. Laat U een vaste unitaire $n \times n$-matrix zijn en definieer de lineaire afbeelding $L : V \to V$ door $L(A) = UA$.

a. Bewijs dat L een unitaire afbeelding is. (4 pt)

Laat $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van U zijn in $\mathbb{C}^n$. Definieer de matrices A_{ij} voor $i, j = 1, 2, \ldots, n$ d.m.v.

$$A_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0} \ \mathbf{a}_j \ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0})$$

waarbij $\mathbf{a}_j$ in de i-e kolom staat (en de andere kolomvectoren de nulvector zijn).

b. Toon aan dat A_{ij} een eigenvector is van L en karakteriseer de bijbehorende eigenwaarde. (4 pt)

c. Toon aan dat de matrices A_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ een orthonormale basis van eigenvectoren van L vormen. (4 pt)