Antwoorden januari 2012.

1a. De matrix van T t.o.v. de basis $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ is $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De standaardmatrix is

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} (C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b. T^2 is lineair en heeft een basis van eigenvectoren met eigenwaarden 0 en 1, dus T^2 is een projectie. Een andere methode is om te laten zien dat $(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^4$.

c. De eigenruimten van T^2 bij e.w. 1 en bij e.w. 0 zijn span$\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ en span$\{\mathbf{b}\}$. Deze zijn onderling orthogonaal dus T^2 is een orthogonale projectie. Het is ook mogelijk om op te merken dat de matrix $(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^2$ symmetrisch is.

2a. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 2i & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b. De matrix $\mathbf{B}$ is hermites en positief-definiet (dit laatste volgt uit het feit dat $\mathbf{B}$ positieve eigenwaarden $3 \pm \sqrt{8}$ en 9 heeft of uit het determinantencriterium:

$$\det \mathbf{B}_1 = 1 > 0, \ \det \mathbf{B}_2 = 5 - 4 = 1 > 0, \ \det B = 9 > 0.$$

c.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{B(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2)}{B(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2i}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Normalizeren: $B(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) = B(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2) = 1$ en $B(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3) = 9$ dus een orthonormale basis is $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ met $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}2i\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3/3 = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

d. De eigenwaarden zijn $3 \pm \sqrt{8}$ en 9; het bereik is het interval $[3-\sqrt{8}, 9]$.

3a. De matrix $A = \begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}$ heeft eigenwaarden 1 en 6; de hoofdassenvorm is $y_1^2 + 6y_2^2 = 1$.

b. De kromme is een ellips.

c. De richtingen van de hoofdassen worden gegeven door de eigenvectoren van A: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

d. De snijpunten van de ellips met de hoofdassen moeten duidelijk zijn t.o.v. de gegeven schaalverdeling! De halve lange as heeft lengte 1 langs $\mathbf{v}$ en lengte $1/\sqrt{6}$ langs $\mathbf{w}$.

4a. Aantonen dat $T(p+q) = T(p) + T(q)$ en $T(\lambda p) = \lambda T(p)$ met $\lambda \in \mathbb{C}$.

b. De matrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ is de diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(1, a, a^2, a^3)$.

c. De matrix t.o.v. de orthonormale basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2/2, X^3/6\}$ is dezelfde als de matrix bij b. Het is voldoende om op te merken dat de matrix normaal is. Maar zonder de eerste opmerking erbij is het antwoord onvolledig omdat een afbeelding normaal is dan en slechts dan als de matrix *t.o.v. een orthonormale basis* normaal is. De basis $\{1, X, X^2, X^3\}$ is immers niet orthonormaal. Als alternatief kan ook worden opgemerkt dat T een orthogonale basis van eigenvectoren heeft (nl. $1, X, X^2, X^3$).

d. Een normale afbeelding/matrix is unitair dan en slechts dan als alle eigenwaarden modulus 1 hebben, dus T is unitair als $|a| = 1$.

5a. $A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$.

b. De oplossing wordt gegeven door $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Omdat $A^2 = -\pi^2 I$ is $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$ en de oplossing is $y(t) = \sin \pi t + \cos \pi t$, $z(t) = \sin \pi t - \cos \pi t$.