Tentamen Lineaire Algebra 2NA

Donderdag 5 januari 2012, 14.00-17.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering.

Voor dit tentamen kunnen 70 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij (minstens) 37 punten.

---

1. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft eigenvectoren $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$ en $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ bij eigenwaarden 1, 0 resp. -1.

a. Bepaal de standaardmatrix van T. (8 pt)

b. Toon aan dat T^2 een projectie is. (4 pt)

c. Ga na of T^2 een orthogonale projectie is. (3 pt)

2. Op de vectorruimte $\mathbb{C}^3$ wordt de vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^3$ gegeven door

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{x_1}y_1 - 2i\overline{x_1}y_2 + 2i\overline{x_2}y_1 + 5\overline{x_2}y_2 + 9\overline{x_3}y_3.$$

a. Laat zien dat $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*\mathbf{B}\mathbf{y}$ voor zekere matrix $\mathbf{B}$ en geef de matrix $\mathbf{B}$. (3 pt)

b. Toon aan dat $B(.,.)$ een hermites inwendig product op $\mathbb{C}^3$ is. (5 pt)

c. Bepaal m.b.v. Gram-Schmidt een basis van $\mathbb{C}^3$ die orthonormaal is t.a.v. het inproduct $B(.,.)$. (8 pt)

d. Welke waarden neemt $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ aan als $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$? (3 pt)

De volgende opgaven staan op de achterkant van dit vel.

3. In $\mathbb{R}^2$ wordt de tweedegraadskromme K gegeven door de vergelijking $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$.

a. Geef de hoofdassenvorm van de kromme K. (4 pt)

b. Wat voor type kromme is K? (2 pt)

c. Bepaal de richting van de hoofdassen van K. (4 pt)

d. Teken K in een rechthoekig assenstelsel met de x-en y-as als coördinaatassen (geef ook een schaalverdeling aan). (4 pt)

4. Gegeven is de vectorruimte P van polynomen met complexe coëfficiënten van graad hoogstens 3. Een element $p \in P$ kan worden geschreven als $p(X) = p_3X^3 + p_2X^2 + p_1X + p_0$ met $p_j \in \mathbb{C}$. Op P wordt een inwendig product gedefinieerd door $\langle p, q \rangle = \sum_{n=0}^{3} \overline{p^{(n)}(0)} q^{(n)}(0)$. (Hierbij zijn $p, q \in P$ en is $p^{(n)}(0)$ de n-de afgeleide van $p(X)$ in $X = 0$.)

De afbeelding $T_a : P \to P$ wordt voor $a \in \mathbb{C}$ gegeven door $T_a(p)(X) = p(aX)$.

a. Toon aan dat T_a een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Geef de matrix van T_a t.o.v. de basis $\mathcal{A} = \{1, X, X^2, X^3\}$. (3 pt)

c. Bewijs dat T_a voor alle $a \in \mathbb{C}$ een normale afbeelding is. (Merk op dat de basis $\mathcal{A}$ niet orthonormaal is.) (4 pt)

d. Voor welke $a \in \mathbb{C}$ is T_a een unitaire afbeelding? (3 pt)

5. Beschouw het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} y'(t) + \pi z(t) = 0 \\ z'(t) - \pi y(t) = 0 \end{cases}$$

a. Schrijf het stelsel in vectorvorm $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ waarbij $\mathbf{x}(t)$ een vector in $\mathbb{R}^2$ en A een 2×2-matrix is. (1 pt)

b. Bepaal m.b.v. e-machten van matrices de oplossing $y(t), z(t)$ van het stelsel waarvoor geldt dat $y(0) = 1,\ z(0) = -1$. (8 pt)