Toets Lineaire Algebra 2NA

Woensdag 5 november 2014, 14.00-16.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 45 punten worden gehaald. Het tentamen is voldoende bij 25 pt.

---

1. U is de matrix $\alpha \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Laat zien dat er een $\alpha > 0$ bestaat zo, dat U een unitaire matrix is. (3 pt)

b. Bepaal een unitaire matrix V en een diagonaalmatrix D zo dat $U = VDV^{-1}$. (Kies α zoals in opgave a.) (8 pt)

2. In $\mathbb{C}^3$ zijn gegeven de vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ spannen de lineaire deelruimte W op.

a. Bepaal een basis van $W^{\perp}$. (3 pt)

b. Bepaal met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van W. (5 pt)

c. Geef de standaardmatrix van orthogonale projectie op W. (5 pt)

3. V is de vectorruimte van reële 2×2-matrices. Op V wordt een inwendig product gegeven door $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ ($\operatorname{tr}(X)$ staat voor het spoor van de matrix X). Verder is J de matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De afbeelding $T : V \to V$ wordt gegeven door $T(A) = JA - AJ$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Geef de matrix van T t.o.v. een zelfgekozen basis. (6 pt)

c. Bepaal bases voor de lineaire deelruimten $\ker(T)$ en $\operatorname{im}(T)$. (6 pt)

d. Laat zien dat voor alle $A, B \in V$ geldt dat $\langle A, T(B)\rangle = -\langle T(A), B\rangle$. (6 pt)