Tussentoets Lineaire Algebra 2NA

Vrijdag 26 oktober 2012, 11.00-13.00

Motiveer elk antwoord met een berekening of redenering. Voor dit tentamen kunnen 48 punten worden gehaald. Het cijfer is gelijk aan het aantal behaalde punten/4,8.

---

1. Door de drie punten $(-1,3)$, $(0,2)$ en $(1,2)$ gaat geen rechte lijn. Bepaal een rechte lijn die zo goed mogelijk past bij de gegeven punten in de zin van een kleinste kwadratenoplossing. (8 pt)

2. In deze opgave beschouwen we de vectorruimte $\mathbb{C}^3$ met de standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. De lineaire deelruimte W wordt opgespannen door $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ en $i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

a. Bepaal m.b.v. de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis van W. (6 pt)

b. Geef een orthonormale basis van $W^\perp$. (4 pt)

c. Bepaal de standaardmatrix van orthogonale projectie op W. (6 pt)

3. Laat V een complexe vectorruimte van dimensie 2 zijn met een inwendig product $\langle\ ,\ \rangle$ en een orthonormale basis $\{a, b\}$. De lineaire afbeeldingen van V naar zichzelf vormen een vectorruimte $\mathcal{L}(V)$ met een optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd als $(T_1+T_2)(v) = T_1(v)+T_2(v)$ resp. $(\lambda T_1)(v) = \lambda T_1(v)$ (voor $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ en $v \in V$.)

a. Toon aan dat de afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T(v) = \langle a, v\rangle b$ lineair is (en dus in $\mathcal{L}(V)$ ligt). (4 pt)

b. Geef de matrix van T t.o.v. de basis $\{a, b\}$. (5 pt)

c. Laat zien dat de hermites geadjungeerde T^* van T wordt gegeven door $T^*(v) = \langle b, v\rangle a$. (5 pt)

d. Bepaal de dimensie van de vectorruimte $\mathcal{L}(V)$. (5 pt)

Op $\mathcal{L}(V)$ wordt een inwendig product $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{L}(V)}$ gedefinieerd als

$$\langle S, T\rangle_{\mathcal{L}(V)} = \langle S(a), T(a)\rangle + \langle S(b), T(b)\rangle.$$

e. Toon aan dat dit inproduct (inderdaad) positief-definiet is. (5 pt)