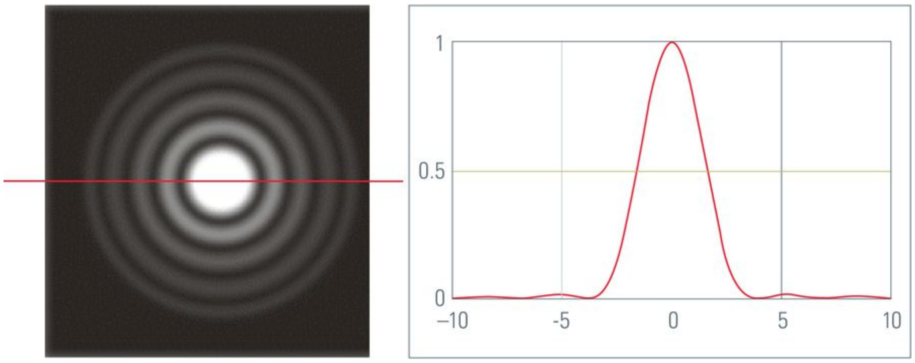
Hertentamen Optica, 13 april 2015 : uitwerkingen

1. **Hoe scherp is het focus?**



   (a) Het intensiteitsprofiel $I(r)$ in het focusvlak van een ideale lens wordt bepaald door de diffractielimiet en bestaat een een centraal maximum met daar omheen een series donkere en lichte (Airy) ringen (zie figuur). De afstand tussen het centrale maximum en het eerste minimum, in de paraxiale limiet, is $\theta \approx 1.22\lambda/D \Rightarrow r = 1.22f\lambda/D$ in het focusvlak van een lens. De afstand van het centrale maximum tot het tweede minimum is bijna $2\times$ zo groot, waardoor de afstand tussen de middelste twee minima bijna $2\times$ zo groot is als de afstand tussen opeenvolgende minima. De relatieve intensiteit van het eerste secundaire maximum is minder dan 3% van de hoofdpiek. *(4 punten)*

2. **Eenvoudige anti-reflectie coating**

   (a) Een dunne laag met brekingsindex n_2 werkt als ideale antireflectie coating op de grenslaag van lucht ($n_1 \approx 1$) en een substraat met brekingsindex n_3 als de reflectie amplitude $r_{12} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ op de grens van medium 1 naar 2 even groot is als de reflectie amplitude $r_{23} = (n_2 - n_3)/(n_2 + n_3)$ op de grens van medium 2 naar 3, en als beide reflecties na propagatie door de coating precies uit fase zijn en destructief intefereren. Oplossen van de vergelijking $r_{12} = r_{23}$ geeft $n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \approx \sqrt{n_3}$ voor $n_1 \approx 1$. *(2 punten)*

   (b) Beide reflecties zijn uit fase als de optische padlengte van het heen-en-weer pad in de coating gelijk is aan $(m + \frac{1}{2})\lambda$. Invullen geeft $2n_2 d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \;\Rightarrow\; d = (2m+1)\,\lambda/(4n_2)$ voor de dikte van de ideale AR-coating. *(2 punten)*

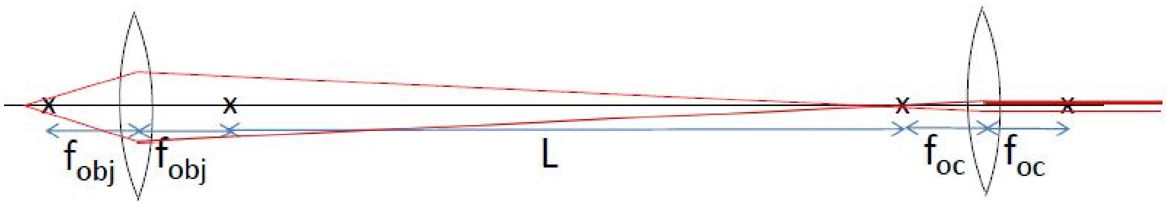
3. **Twee polarisatoren en $\lambda/4$ plaatje**

   (a) Als de snelle as van het $\lambda/4$ plaatje evenwijdig staat aan de transmissie as van de eerste polarisator dan verandert dit plaatje de inkomende lineaire polarisatie niet en zal de tweede polarisator al het licht tegenhouden, waardoor $I_{uit} = 0$. *(1 punt)*

   (b) Als de snelle as van het $\lambda/4$ plaatje onder 45° staat ten opzichte van de transmissie as van de eerste polarisator dan wordt het doorgelaten licht circulair gepolariseerd. Omdat de eerste polarisator de helft van het invallende ongepolariseerde licht doorlaat en de tweede polarisator de helft van het invallende circulair gepolariseerde licht doorlaat is de doorgelaten intensiteit $I_{uit} = I_0/4$. *(1 punt)*

(c) Om als nulde-orde $\lambda/4$ plaatje te werken moet het verschil in optische padlengte tussen de twee polarisatie compenten gelijk zijn aan $\lambda/4$. Invullen geeft $(n_e - n_o)d = \lambda/4 \Rightarrow d = \lambda/[4(n_e - n_o)] = 17.3\ \mu$m. *(2 punten)*

4. **Microscoop als twee-traps vergroter**



(a) De stralen divergeren vanaf het object, worden door het objectief veranderd in een convergente bundel met een focus op een afstand f_{oc} voor het occulair en lopen als een evenwijdige bundel verder na het occulair, om met een ontspannen (= ongeaccomodeerd) oog scherp te worden waargenomen (zie figuur). *(3 punten)*

(b) Om een scherpe afbeelding op een afstand $s_2 = L + f_{obj}$ achter het objectief te krijgen moet het voorwerp op een afstand $s_1 = f_{obj}\,(1 + f_{obj}/L)$ voor het objectief staan, omdat

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{f s_2}{s_2 - f} = \frac{f_{obj}\,(L + f_{obj})}{L}$$

Invullen van deze afstand in de formule voor de vergroting van een lens geef het gevraagde resultaat $M_{obj} = s_2/s_1 = L/f_{obj}$ *(2 punten)*

(c) De vergroting van het occulair is gedefiniëerd als de grootte waaronder we het (virtuele) voorwerp door de occulair lens zien ten opzichte van de grootte waarop we het voorwerp zouden zien op een standaard afstand van $L_{standaard} = 25$ [cm]. De grootte waaronder we een voorwerp met hoogte h zien wordt bepaald door de hoekgrootte: h/f_{oc} in het eerste geval en $h/L_{standaard}$ in het tweede geval. Deling van beide resultaten geeft $M_{oc} = 25$ [cm]/$\mathrm{f_{oc}}$. *(1 punt)*

5. **Interferentiestrepen voor twee gekruiste bundels**
N.B. Deze vraag is identiek aan opgave 4 uit werkcollege 5 van academische jaar 2014-2015

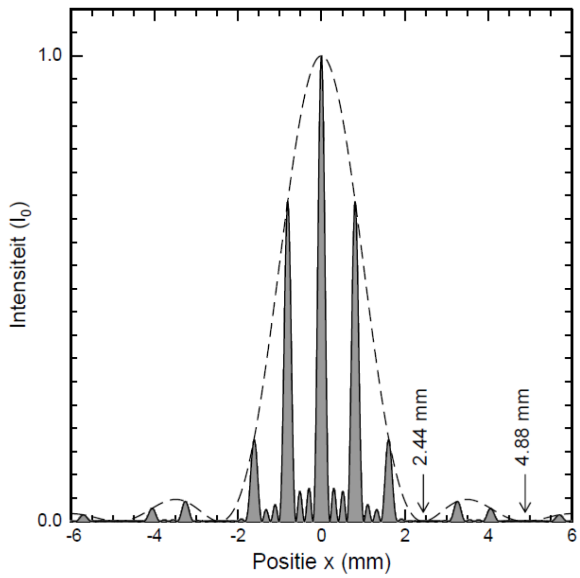
(a) De electrische velden van de twee vlakke golven zijn $E_1(\mathbf{r},t) = E_0\mathrm{Re}[\exp[i(\mathbf{k_1}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]]$ en $E_2(\mathbf{r},t) = E_0\mathrm{Re}[\exp[i(\mathbf{k_2}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]]$, met gelijke veldsterkte $E_{01} = E_{02} = E_0$, gelijke frequentie $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ en gelijke absolute golfvector $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k$. De richtingen van de golfvectoren $\mathbf{k}_1$ en $\mathbf{k}_2$ zijn wel anders, want ze staan onder een hoek θ van elkaar en een hoek $\theta/2$ ten opzichte van de z-as. Op basis van de figuur in de opgave definiëren we $\mathbf{k_1} = -k_x\mathbf{i} + k_z\mathbf{k}$ en $\mathbf{k_2} = k_x\mathbf{i} + k_z\mathbf{k}$ met $k_x \equiv k\sin(\frac{\theta}{2}),\ k_z \equiv k\cos(\frac{\theta}{2})$ en de gebruikelijke eenheidsvectoren $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, om te benadrukken dat de golfvectoren $\mathbf{k}_1$ en $\mathbf{k}_2$ enkel verschillen in hun x-component. Het totale veld kan nu geschreven worden als:

$$\begin{aligned} E_{tot}(\mathbf{r},t) &= E_1(\mathbf{r},t) + E_2(\mathbf{r},t) = E_{01}\cos(k_{1,x}x + k_{1,z}z - \omega t) + E_{01}\cos(k_{2,x}x + k_{2,z}z - \omega t) \\ &= E_0[\cos(k_z z - \omega t - k_x x) + \cos(k_z z - \omega t + k_x x)] \\ &= 2E_0\cos(k_x x).\cos(k_z z - \omega t) \end{aligned}$$

Deze gecombineerde golf heeft een golfvector k_z in de z-richting en een amplitudo die varieert in de dwars ($= x$) richting volgens $2E_0 \cos(k_x x)$. De totale intensiteit $I_{tot}(\mathbf{r}, t) \propto E_{tot}^2(\mathbf{r}, t) = 4E_0^2 \cos^2[k_x x] = 4E_0^2 \cos^2[k \sin(\frac{\theta}{2})x]$ verandert ook als een cosinus met de dwarspositie x en kan geschreven worden als $I(x, z) = 4I_0 \cos^2(\pi x/\Lambda)$, met intensiteitsmaxima die $4\times$ groter zijn dan de intensiteiten van de twee individuele bundels. *(3 punten)*

(b) De periode Λ tussen opeenvolgende maxima in het interferentiepatroon volgt de relatie: $\pi/\Lambda = k \sin(\frac{\theta}{2}) \approx \pi\theta/\lambda \;\Rightarrow\; \Lambda \approx \lambda/\theta$. *(1 punt)*

6. **Diffractiepatroon achter N spleten**



(a) De hoekafhankelijke intensiteit $I(\theta)$ van elk van de individuele spleten is zichtbaar als de omhullende functie van het interferentiepatroon van beide spleten. De minima voor $x = \pm 2.44$ mm en $x = \pm 4.88$ mm zijn de minima van het gebruikelijke $E(\theta) \propto \sin(\pi\theta/\theta_0) / (\pi\theta/\theta_0)$ diffractiepatroon van één spleet. *(1 punt)*

(b) De breedte b van de spleten volgt uit de afstand tussen het central maximum en het eerste minimum in het omhullende diffractiepatroon van één spleet. Invullen geeft $x = f\theta_0 = f\lambda/b \Rightarrow b = f\lambda/x = 0.5 \times 0.488 \times 10^{-6}/2.44 \times 10^{-3}$ m $= 100$ μm. *(2 punten)*

(c) Hoeveel spleten het tralie bevat kun je aflezen aan het aantal minima tussen twee hoofdmaxima. Je moet hierbij wel opletten want de centrale maxima zijn twee keer zo breed en tellen daarom als het ware dubbel, iets waar de hint je voor waarschuwde door je te wijzen op het interferentie patroon van $N = 2$ spleten, dat maar één minimum tussen de maxima heeft. Voor de figuur met drie minima is het juiste antwoord dus $N = 4$ spleten. *(1 punt)*

(d) De onderlinge afstand a tussen de spleten volgt uit de posities van de hoofdmaxima, die beschreven worden door de formule $a \sin\theta = m\lambda$ met $sin\theta \approx \theta \approx x/f$ in het paraxiale regiem. Omdat het 3-de orde maximum en veelvouden daarvan ontbreken geldt $a = 3b = 300$ μm. *(2 punten)*

7. **Scheiding van twee Natrium-lijnen met tralie**

We proberen de twee spectraallijnen van sodium ($\lambda = 589.592$ en 589.995 nm) gescheiden van elkaar waar te nemen door dit licht, in eerste instantie loodrecht, op een reflectie tralie met 1000 lijnen per mm te schijnen en in een diffractie orde waar te nemen.

(a) Bij loodrechte inval volgt de 1-ste orde diffractiehoek θ van elke van de spectraallijnen uit de formule $a \sin\theta = \lambda$. Invullen geeft $\theta_1 = 36.1281° = 0.630554$ rad en $\theta_2 = 36.1567° = 0.630105$

rad. Het hoekverschil wordt hiermee $\theta_2 - \theta_1 = 0.449$ mrad en de onderlinge afstand 4.49 mm op een scherm op 10 m afstand. N.B. Voor $\lambda_2 \approx \lambda_1 \approx \lambda$ kunt je dit hoekverschil ook uitrekenen door de formule $a \sin\theta = \lambda$ te differentiëren voordat je hem invult, met natuurlijk hetzelfde resultaat $\theta_2 - \theta_1 \approx (\lambda_2 - \lambda_1)/(a\cos\theta) = 0.499$ mrad. *(2 punten)*

(b) De hoekresolutie wordt bepaald door de diffractie formule $\theta_{dif.} = \lambda/D_{project} = \lambda/(D\cos\theta)$ met $D_{project} = D\cos\theta$ de breedte van de gereflecteerde bundel. Je kunt de twee spectraallijnen gescheiden zien als $\theta_2 - \theta_1 > \theta_{dif} \;\; \Rightarrow \;\; D > a\lambda/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Invullen geeft $D > 2.48$ mm. *(2 punten)*

(c) Het spectraal oplossend vermogen $R \equiv \lambda/\Delta\lambda = N.m$, met $N = D/a$ het aantal belichte tralielijnen en m de diffractie orde. Je kunt het spectraal oplossend vermogen dus verhogen door naar een hogere diffractie orde te kijken. Hiervoor moet je het genoemde tralie wel scheef belichten, omdat onder loodrechte inval enkel het eerste orde diffractiepatroon zichtbaar is. *(1 punt)*