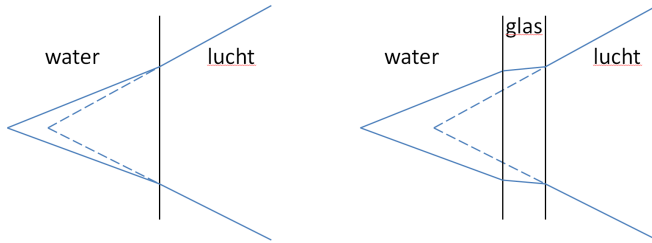


# Hertentamen Optica, 11 april 2016 : uitwerkingen

## 1. Vis in rechthoekig aquarium



- (a) De linker figuur toont de stralengang van water naar lucht. (1 punt)
- (b) De breking van licht aan de grenslaag tussen medium 1 en 2 wordt beschreven met de standaardformule

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}.$$

De breking van water ( $n_1 = n_{water}$ ) naar lucht ( $n_2 \approx 1$ ) aan een vlakke grenslaag ( $1/R = 0$ ) geeft  $s_2 = -s_1/n_{water}$ . Het min-teken toont dat het beeld virtueel is; de verhouding tussen de schijnbare en de werkelijke positie van de vis is  $-s_2/s_1 = 1/n_{water}$ . (2 punten)

- (c) De rechter figuur toont de stralengang voor het geval dat het glas ( $n_{glas} > n_{water}$ ) dik is. Ter info: bij een gegeven schijnbare afstand is de werkelijk afstand van de vis tot de buitenkant van het aquarium nu dus nog groter geworden! (maar dit werd niet gevraagd) (1 punt)

## 2. Newton's formule voor afbeeldingen

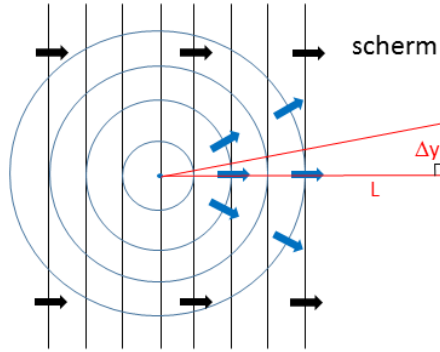
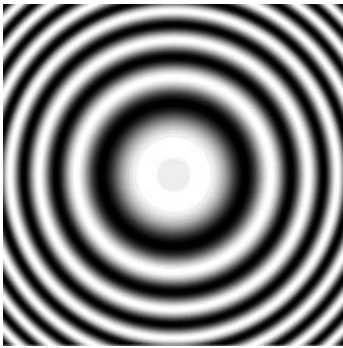
- (a) Invullen van de voorwerpsafstand  $s_1 = f + x_1$  en de beelds afstand  $s_2 = f + x_2$  in de standaard afbeeldingsformule geeft

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f + x_1} + \frac{1}{f + x_2} \Rightarrow \frac{1}{f + x_2} = \frac{1}{f + x_1} - \frac{1}{f} = \frac{x_1}{f(f + x_1)} \Rightarrow x_1 x_2 = f^2$$

(1 punt)

- (b) De beeldvergroting  $M = -s_2/s_1 = -(f + x_2)/(f + x_1)$ . (1 punt)

### 3. Interferentie tussen vlakke golf en bolgolf



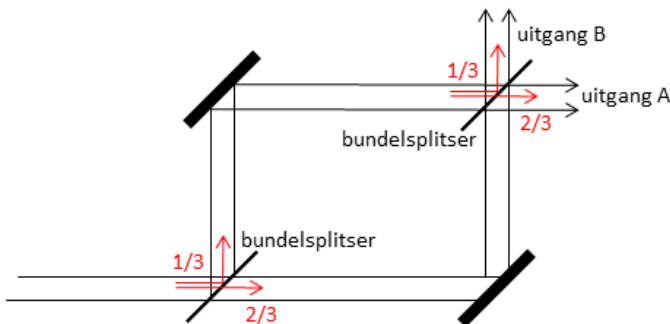
- (a) De linker figuur toont een 2-dimensionaal plaatje van het verwachte interferentiepatroon. Merk op dat de afstanden tussen de opeenvolgende maxima vanaf het centrum steeds kleiner worden. De intensiteit in het centrum is maximaal voor het in vraag b genoemde geval dat het verstrooide licht in fase is met het invallende licht, maar een andere schets is ook goed. (2 punten)
- (b) De rechterfiguur toont de interferentie tussen de vlakke inkomende golf en de verstrooide bolgolf. Als het verstrooide licht in fase is met het invallende licht dan is de intensiteit maximaal op de as. Als het eerste-orde maximum zich op een afstand  $\Delta y$  van de as bevindt, dan geeft een Taylor expansie van de stelling van Pythagoras:

$$L + \lambda = \sqrt{L^2 + (\Delta y)^2} \approx L + \frac{(\Delta y)^2}{2L} \Rightarrow \Delta y = \sqrt{2\lambda L}$$

(2 punten)

### 4. Mach-Zehnder interferometer met ongebalanceerde bundelsplitser

De maximale en minimale intensiteiten in de twee uitgangen van de Mach-Zehnder interferometer ontstaan door interferentie van licht dat de bovenste arm heeft genomen met licht dat de onderste arm heeft genomen. De boekhouding werkt als volgt: (i) bereken eerst de intensiteit van beide bijdragen, (ii) bereken dan de bijbehorende velden  $E_{boven}$  en  $E_{onder}$  en (iii) combineren tot slot deze velden tot  $I_{max} \propto |E_{boven} + E_{onder}|^2$  en  $I_{min} \propto |E_{boven} - E_{onder}|^2$



- (a) De twee lichtpaden naar uitgang A van de Mach-Zehnder interferometer hebben dezelfde intensiteit  $I_{boven} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{9} I_0$  en  $I_{onder} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} I_0 = \frac{2}{9} I_0$ . De bijbehorende optische velden zijn  $E_{boven} = E_{onder} = \frac{1}{3} \sqrt{2} E_0$ , waardoor  $I_{max} = |(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \sqrt{2}|^2 I_0 = \frac{8}{9} I_0$  en  $I_{min} = |(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) \sqrt{2}|^2 I_0 = 0$ . (2 punten)
- (b) De twee lichtpaden naar uitgang B van de Mach-Zehnder interferometer hebben intensiteit  $I_{boven} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} I_0 = \frac{1}{9} I_0$  en  $I_{onder} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} I_0 = \frac{4}{9} I_0$ . De bijbehorende optische velden zijn

$E_{boven} = \frac{1}{3}E_0$  en  $E_{onder} = \frac{2}{3}E_0$ , waardoor  $I_{max} = |\frac{1}{3} + \frac{2}{3}|^2 I_0 = I_0$  en  $I_{min} = |\frac{1}{3} - \frac{2}{3}|^2 I_0 = \frac{1}{9}I_0$ . Merk op dat  $I_A + I_B = I_0$  voor alle vormen van interferentie. We rekenen het natuurlijk goed als je deze eigenschap noemt en gebruikt om  $I_B = I - I_A$  te berekenen op basis van het antwoord in A. (2 punten)

### 5. Reflectie en transmissie van $\lambda/4$ plaatje

We beschouwen de reflectie van lineair gepolariseerd licht met een golflengte  $\lambda = 600$  nm bij loodrechte inval op een dun plaatje dubbelbrekend materiaal. Voor het eerste experiment gebruiken we licht met een polarisatie langs de snelle as van het dubbelbrekende plaatje; de brekingsindex voor dit licht is  $n_f = 1.500$ ; noem de dikte van het plaatje  $d$ .

- De reflectie aan de voorkant (van lucht naar plaatje) is van nature  $180^\circ$  uit fase met de reflectie aan de achterkant (van plaatje naar lucht). De totale reflectie is minimaal als de reflectie aan de voor- en achterkant destructief interfereren, dus als de optische padlengte van het heen-en-weer pad  $2nd = m\lambda \Rightarrow d = m \times \lambda/(2n)$  met integer  $m$ . (1 punt)
- Hoe plaatje werkt als nulde-orde  $\lambda/4$  plaatje als het verschil in optische padlengte van het doorgelaten licht  $(n_f - n_s)d = \lambda/4 \Rightarrow (n_f - n_s) = \lambda/(4d)$ . Invullen van  $\lambda = 600$  nm en  $d = 50 \mu\text{m}$  geeft  $(n_f - n_s) = -0.003$ . (1 punt)
- De polarisatietoestand van licht met een polarisatie langs de snelle as verandert niet, dus de optische polarisatie blijft in dit geval lineair. (1 punt)
- Licht met een lineaire polarisatie onder  $45^\circ$  ten opzichte van de hoofdassen van het  $\lambda/4$  plaatje wordt circulair gepolariseerd in transmissie. (1 punt)
- Licht dat aan de achterkant van het plaatje reflecteert en er aan de voorkant weer uitkomt gaat twee keer door het plaatje en ondervindt hiermee de polarisatieverandering van een  $\lambda/2$  plaatje. Dit gereflecteerde licht is lineair gepolariseerd in een richting loodrecht op de invallende lineaire polarisatie. (1 punt)
- Twee bundels met loodrechte onderlinge polarisatie interfereren niet. De reflectie van dit plaatje is dus ongeveer twee keer zo groot als de reflectie aan één grenslaag en (in eerste orde) onafhankelijk van de optische golflengte. (1 punt)

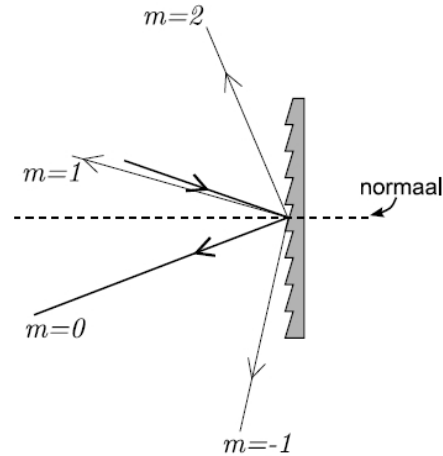
### 6. Spionage satelliet

Een spionage satelliet bevindt zich op een hoogte van 200 km boven het aardoppervlak. De satelliet kan foto's maken met een lens met een doorsnede van 20 cm. De camera is het meest gevoelig voor een golflengte van 500 nm. De pixelgrootte van de in de camera gebruikte chip is  $5 \mu\text{m}$ .

- De fijnste details die met deze camera gezien kunnen worden, worden bepaald door de diffractielimiet  $\Delta x = L\Delta\theta = 1.22L\lambda/D$ . Invullen van  $L = 200 \text{ km} = 2 \times 10^5 \text{ m}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$  en  $D = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$  geeft  $\Delta x = 1.22 \times 0.5 \text{ m} = 61 \text{ cm}$ . (2 punten)
- Om er voor te zorgen dat deze details door minimaal 1 pixel van  $\Delta x_{\text{pixel}} = 5 \mu\text{m}$  worden waargenomen moet de diffractielimiet richting de camera  $\Delta x' = f\Delta\theta = 1.22f\lambda/D > \Delta x_{\text{pixel}} \Rightarrow f > [D/(1.22\lambda)]\Delta x_{\text{pixel}}$ . Invullen van  $D = 0.2 \text{ m}$ ,  $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$  en  $\Delta x_{\text{pixel}} = 5 \mu\text{m}$  geeft  $f > 1/(1.22 \times 0.5) \text{ m} = 1.6 - 1.7 \text{ m}$  (beide afrondingen zijn OK) (2 punten)

## 7. Reflectietralie

Een blazed optisch tralie met 1000 lijnen per millimeter wordt onder een hoek van  $20^\circ$  ten opzichte van de normaal beschenen met licht met een golflengte van 600 nm. Er zijn vier reflecties zichtbaar. (zie figuur)



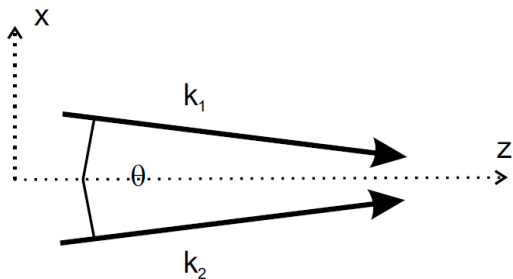
- (a) De diffractie aan een reflectietralie wordt beschreven door de formule

$$\frac{2\pi}{\lambda} [\sin \theta_{in} + \sin \theta_{uit}] = m \frac{2\pi}{d} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_{in} + \sin \theta_{uit} = m \frac{\lambda}{d},$$

bij diffractie orde  $m$ , een formule die je kunt afleiding door optische padlengtes met elkaar te vergelijken. Het plus teken is zo gekozen is dat de hoeken van inval en uitree op dezelfde manier worden gemeten, waardoor  $\theta_{uit} = -\theta_{in}$  bij speculaire reflectie op het tralie ( $m = 0$ ). Invullen van  $\lambda/d = 0.6$  en  $\sin(\theta_{in}) = 0.342$  geeft  $\sin(\theta_{-1}) = -0.942$ ,  $\sin(\theta_0) = -0.342$ ,  $\sin(\theta_1) = 0.258$ ,  $\sin(\theta_2) = 0.858$ . (3 punten)

- (b) De zaagtand-vorm van het tralie heeft geen invloed op de positie van de diffractie ordes, maar wel op de relatieve intensiteit van deze ordes. Ter info: de geschetste zaagtand zal vooral de intensiteit van de  $m = 1$  orde vergroten, omdat dit licht op vrij natuurlijke wijze aan de traliefacetten reflecteert (maar dit werd niet gevraagd). (1 punt)
- (c) Als we de hele opstelling in een bak met water ( $n = 1.33$ ) dompelen worden alle diffractiehoeken kleiner, omdat de optische padlengtes nu vergeleken moeten worden met de golflengte in het medium. De golflengte in de diffractieformule moeten we nu lezen als  $\lambda = \lambda_0/n$ , waarbij  $\lambda_0$  de golflengte in vacuüm is en  $n$  de brekingsindex van het medium. (1 punt)

## 8. Interferentiestrepen voor twee gekruiste bundels



- (a) De elektrische velden van de twee vlakke golven zijn  $E_1(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  en  $E_2(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , met gelijke veldsterkte  $E_{01} = E_{02} = E_0$ , gelijke frequentie  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  en gelijke absolute golfvector  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k = 2\pi/\lambda$ . De figuur laat zien dat de z-componenten van beide golfvectoren gelijk zijn aan  $k_{1,z} = k_{2,z} = k \cos(\frac{\theta}{2}) \equiv k_z$ , maar dat de x-componenten in teken verschillen met  $k_{2,x} = -k_{1,x} = k \sin(\frac{\theta}{2}) \equiv k_x$ . Het totale veld wordt hiermee:

$$E_{tot}(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(k_{1,x}x + k_{1,z}z - \omega t) + E_0 \cos(k_{2,x}x + k_{2,z}z - \omega t)$$

Dit antwoord is al (2 punten) waard, maar het is netter als je je antwoord uitdrukt in  $k_x$  en  $k_z$ .

- (b) Het totale veld kan worden geschreven tot:

$$E_{tot}(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t) = E_0 [\cos(-k_x x + k_z z - \omega t) + \cos(k_x x + k_z z - \omega t)] = 2E_0 \cos(k_x x) \cdot \cos(k_z z - \omega t)$$

Dit totale veld is een lopende golf in de z-richting, zoals blijkt uit de factor  $\cos(k_z z - \omega t)$ , met een amplitudo die varieert in de dwars (= x) richting volgens  $2E_0 \cos(k_x x)$ . De totale intensiteit  $I_{tot}(\mathbf{r}, t) \propto E_{tot}^2(\mathbf{r}, t) = 4E_0^2 \cos^2(k_x x)$  verandert ook cosinusvorming met de dwarspositie x en kan worden geschreven als  $I(x, z) = 4I_0 \cos^2(\pi x/\Lambda)$  met periode  $\Lambda = \pi/k_x = \lambda/[2 \sin(\theta/2)] \approx \lambda/\theta$  tussen opeenvolgende maxima in het interferentiepatroon. (2 punten)