Tentamen Optica

Uitwerkingen - 26 februari 2013

Cijfer = (totaal aantal punten+10)/6.4

Opgave 1

a) (3 p) Nee, dit is een dikke lens. Je mag de propagatie in de lens niet verwaarlozen. Dit is bijv. in te zien voor een lichtstraal die parallel aan de optische as op de ball-lens valt. De hoogte boven de optische as waar deze straal de lens binnenkomt is niet gelijk aan de hoogte waar deze straal weer uit de lens komt.

b) (3 p) Omdat het hier gaat om een dikke lens moeten we eerst de breking uitrekenen aan het eerste gekromde oppervlak. De gevonden beeldpunts afstand vullen we dan in als de voorwerpsafstand voor breking aan het tweede oppervlak, waarbij we rekening houden met de dikte van de lens. Voor breking aan het eerste gekromde oppervlak gebruiken we

$$\frac{1}{s_o} + \frac{n}{s_i} = \frac{n-1}{R}$$

waarbij de kromtestraal $R = 1.5$ mm, $n = 1.470$ en $s_o = \infty$ voor een parallele bundel. Hiermee vinden we

$$s_i = \frac{nR}{n-1} \approx 4.691 \text{ mm}$$

Dit beeldpunt ligt buiten de bol. Voor breking aan het tweede oppervlak moeten we dus een negatieve voorwerpsafstand invullen. We gebruiken voor de breking aan het tweede oppervlak

$$\frac{n}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{n-1}{R}$$

Waarbij we rekening houden met het feit dat we breken van glas naar lucht *en* de negtaieve kromtestraal voor het tweede oppervlak. We vullen voor de voorwerpsafstand s_o in 3 mm - 4.691 mm, oftwel 1.691 mm rechts van het tweede oppervlak. Dit geeft een beeldpuntsafstand $s_i = 1.1$ mm. Deze afstand is gemeten t.o.v. het rechteruiteinde van de bol. (2.6 mm gemeten vanaf het midden van de bol).

c) (3 p) In dit geval moet het brandpunt precies op het oppervalk van de ball-lens uitkomen. Het is dan voldoende om alleen de breking aan het eerste oppervlak te beschouwen. We gebruiken

$$\frac{n}{s_i} = \frac{n-1}{R}$$

waarbij we hebben aangenomen dat de lens in lucht of vacuum zit met brekingsindex n=1. Verder weten we dat voor de parallel inkomende bundel moet gelden dat de beeldpuntsafstand

s_i gelijk is aan de diameter $2R$ van de lens. Dit invullen geeft:

$$\frac{n}{2R} = \frac{2n-2}{2R} \qquad \Leftrightarrow$$

$$n = 2$$

Opgave 2

a) (3 p) De verschillende hoeken waaronder het licht van het tralie afkomt zijn die hoeken waarbij het licht van de vershcillende speleten constructief interfereert. deze hoeken voldoen aan de tralieverglijking

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{a}$$

waarbij m de orde van de diffractie is, λ de golflengte en a de tralieconstante. Deze constante a is gelijk aan de afstand tussen de lijnen van de tralie, i.e. 10/600 mm. De hoek van de eerste interferentieorde (m = 1) bij $\lambda_1 = 588.99$ nm en is $\sin^{-1}(\lambda/a) = 2.0252°$. De hoek van de eerste interferentieorde bij een golfengte van $\lambda_2 = 589.59$ nm is 2.0273°.

b) (3 p) Het hoekoplossend vermogen wordt gegeven door

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

waarbij N het aantal belichte lijnen in het tralie is. Voor een 1 cm breede bundel worden er 600 lijnen belicht. Uit bovenstande vergelijking vinden we $\Delta\lambda = 0.98$ nm. Het golfengte verschil dat we zoeken is 0.60 nm wat dus te klein is om waar te nemen in de eerste diffractie orde. Je kunt dit resultaat ook vinden door gebruik te maken van de diffractiehoek $\Delta\theta = \lambda/(D\cos\theta)$, waarbij $D\cos\theta$ de geprojecteerde bundelbreedte is.

c) (3 p) Het minimaal onderscheidbare golfengteverschil $\Delta\lambda$ moet kleiner zijn dan het te meten golflengteverschil. Dit komt overeen met

$$\frac{\lambda}{mN} \geq 0.60\text{nm},$$

ofwel $m \geq 1.63$. De twee spectraallijnen zijn dus al in de tweede diffractie orde te onderscheiden.

Opgave 3

a) (3 p) Het $\lambda/2$-plaatje draait de verticale polarisatie over 40° door de component van het veld loodrecht op de as te spiegelen. De 2^e polarisator laat dus maximaal door bij een hoek van 40°.

b) (3 p) We nemen aan dat het inkomende licht ongepolariseerd is. (N.B. Dit stond niet in de opgave, vele varianten zijn goedgerekend). Na de polarisator is de intensiteit $I_0/2$. Omdat de hoek tussen de as van het $\lambda/4$-plaatje en de polarisator precies 45° is wordt het licht omgezet in circulair gepolariseerd licht. Het $\lambda/2$-plaatje draait het licht, maar dit blijft circulair. De tweede polarisator laat vervolgens de helft van het circulair gepolariseerd licht door. De totale transmissie is dus $I_0/4$

c) (3 p) Gevraagd wordt de transmissie door twee polarisatoren. Dit wordt gegeven door de wet van Malus

$$I = I_0/2 \cos^2 \theta$$

waarbij we met de voorfactor $I_0/2$ hebben aangenomen dat er ongepolariseerd licht valt op de eerste polarisator. Invullen van $\theta = 40°$ levert $I = 0.29 I_0$.

Opgave 4

a) (4 p) Om dit te bereiken moet de reflectie van het grensvlak lucht-film en film-subtraat constructief interfereren. Het totale faseverschil wordt bepaald door de optische padlengte en een extra fase-sprong van π omdat de brekingsindex van de film hoger is dan die van het substraat.

$$\Delta\varphi = k n_f 2d + \pi = 2m\pi$$

De kleinste waarde van d waarvoor dit waar is wordt gevonden voor $m = 1$ en geeft

$$d = \frac{\pi}{2kn_f} = \frac{\lambda}{4n_f}$$

Ivullen van $\lambda = 2.0\ \mu$m en $n_f = 2$ geeft $d = 0.25\ \mu$m.

b) (4 p) Voor destructieve interferentie moet gelden dat

$$\Delta\varphi = k n_f 2d_{\min} + \pi = (2p+1)\pi$$

Dit geeft

$$d_2 = \frac{p\lambda_2}{2n_f}$$

Uit het resultaat van a) weten we data

$$d_1 = \frac{(2m-1)\lambda_1}{4n_f}$$

Als de dikte hetzelfde moet zijn volgt dat

$$\frac{d_1}{d_2} = 1 = \frac{(2m-1)\lambda_1}{2p\lambda_2}$$

Invullen van $\lambda_1 = 2.0\ \mu$m en $\lambda_2 = 2.5\ \mu$m geeft

$$5p + 2 = 4m$$

Voor $p = 1$ is $m = 4/7$, voor $p = 2$ is $m = 3$. Dit lijkt de eerste oplossing. Controle $d_2 = 2 \times 2.5/(2 \times 2) = 1.25$ μm en $d_1 = (6-1) \times 2.0/(4 \times 2) = 1.25$ μm. De minimale dikte van de film is dus 1.25 μm.

Opgave 5

a) (3 p) Het Rayleigh criterium voor een circulair apertuur geeft

$$\Delta\theta_{mathrmmin} = \frac{1.22\lambda}{D}$$

met $\Delta\theta_{mathrmmin}$ de openingshoek tussen de lichtstralen van de twee stokken, λ de gemiddelde golflengte van het licht en D de diameter van de pupil. Voor een afstand L van de stokken af kunnen we de twee nog onderscheiden als

$$L = \frac{W}{\Delta\theta_{mathrmmin}} = \frac{WD}{1.22\lambda} = 261 \text{ m}$$

waarbij $W = 5$ cm de afstand tussen de twee stokken. We hebben hierbij gebruik gemaakt van de paraxiale benadering.

b) (3 p) De vergroting van de verrekijker geeft een hoekvergroting van het beeld. Dit maakt alle hoeken een factor M groter. Als dit het enige effect is van de verrekijker wordt ook de hoek $\Delta\theta_{mathrmmin}$ een factor M groter en blijft het Rayleigh criterium onveranderd.

c) (3 p) De resolutie moet groter worden, dus de oogpupil moet effectief vergroot worden. De 'ingangspupil' van de verrekijker moet dus groter zijn. Om de stokjes als onderscheidbaar te kunnen waarnemen moeten we de diameter van de verrekijker D' minimaal 4.03 mm maken.

Opgave 6

a) (3 p) De fasesnelheid kun je vinden door gebruik te maken van

$$v_{\text{fase}} = \frac{c}{n} = c\sqrt{\frac{1}{1-\omega_p^2/\omega^2}} = \sqrt{\frac{c^2\omega^2}{\omega^2-\omega_p^2}},$$

waarbij c de lichtsnelheid is. Deze uitdrukking is slechts geldig voor $\omega > \omega_p$.

b) (1 p) Voor $\omega > \omega_p$ geldt dat de brekingsindex $n < 1$. Dat betekent dus dat de fasesnelheid groter is dan de lichtsnelheid.

c) (4 p) We gebruiken

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

hiermee vinden we

$$\omega^2 = c^2 k^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad \Leftrightarrow$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}, \quad \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

vervolgens vinden we de groepssnelheid door

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1}$$

$$v_g = \left(\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\right)^{-1} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

d) (1 p) Invullen van $\omega > \omega_p$ geeft inderdaad een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid.