Tentamen Optica

Uitwerkingen - 14 februari 2012

Cijfer = (totaal aantal punten+10)/6.4

Opgave 1

Zowel a) en c) zijn golven, want deze functies zijn 2× differentieerbaar naar x en t, en ze zijn te schrijven als een functie van $(x - vt)$ en $(z + vt)$

a) (3 p) Deze functie kan geschreven worden als $\Psi(x,t) = a^2(x - b/at)^2$. In dit geval is $v = b/a$ en de golf loopt in de positieve x-richting.

b) (3 p) Dit is geen lopende golf. De gegeven functie hangt wel af van de plaats x, maar niet van de tijd t. De functie voldoet ook niet aan de golfvergelijking.

c) (3 p) Deze functie kan worden geschreven als $\Psi(z,t) = \sin(a(z + b/at + c/a))$. De snelheid is weer $v = b/a$ en de golf loopt in de negatieve z-richting

Opgave 2

a) (9 p) De vergroting is gegeven door $M = b/v$. Invullen van de lenzen formule $1/f = 1/b + 1/v$ met $v = 3$ cm en $b = -2$ cm (virtueel beeld dus negatief) geeft een brandpuntsafstand $1/f = -1/6$ cm. De lens heeft een sterkte van -17 dioptrie.

Opgave 3

a) (3 p) Voor anti reflectie moet de reflectie van het eerste oppervlak precies uit fase zijn met die van het tweede oppervlak. In dit geval gaat het voor beide grensvlakken om een reflectie van een medium met lage index naar een medium met hoge index. Er is dus geen extra faseverschil van π door de reflectie! Het faseverschil wordt dus bepaald door het verschil in optische weglengte en moet gelijk zijn aan π. $k \times 2d \times n = \pi$, dus $d = \lambda/(4n) = 500/4.8 = 104nm$

b) (3 p) Nu is er op het tweede grensvlak sprake van reflectie van hoge index naar lage index en moet er een extra fase π worden meegenomen. Het faseverschil door het verschil in optische weglengte moet dan gelijk zijn aan 2π. $k \times 2d \times n = 2\pi$, oftewel $d = \lambda/(2n) = 500/3.6 = 139nm$.

c) (3 p) Dit treedt op bij een kortere golflengte. Voor $n_f = 1.2$ gebruiken we $k \times 2d \times n = 3\pi$, dus $\lambda = 4/3nd = 166$ nm. Voor $n_f = 1.8$ gebruiken we $k \times 2d \times n = 3\pi$, dus $\lambda = nd = 250$ nm.

Opgave 4

a) (3 p) Het prisma werkt als polarisator omdat de kritische hoek voor totale interne reflectie ongelijk is voor beide polarisaties. De kritische hoek wordt gegeven door $sin\theta_1 = 1/n_1$, waarbij θ_1 de hoek is t.o.v. de normaal. De hoek θ in de figuur is gelijk aan $\pi/2 - \theta_1$. De kritische interne hoeken θ worden dus gegeven door $\arccos(1/n_e)$ en $\arccos(1/n_o)$. Het prisma werkt dus als polarisator voor hoeken θ tussen de 47.7° en 52.9°.

b) (2 p) Zonder luchtlaag treedt er geen totale interne reflectie op. In dit geval gaan beide polarisaties rechtdoor en komen beide aan de achterkant uit het prisma.

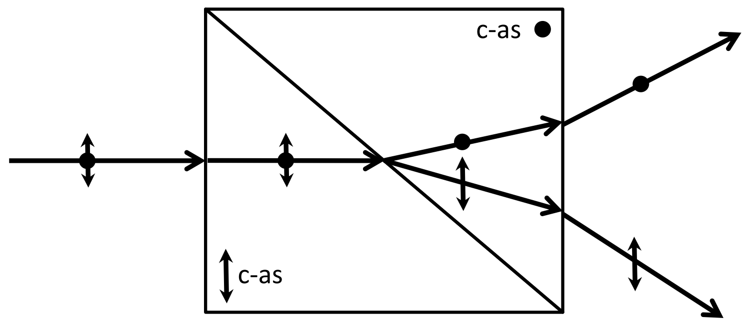
c) (3 p) De hoek van inval is nu 45° en dit is ook de hoek t.o.v. de normaal. De e-straal (polarisatie langs de c-as) breekt van de normaal af het 2e prisma in en vervolgens nog eens bij het verlaten van het prisma. De o-straal breekt juist naar de normaal toe.

e-straal. Snell geeft $n_e \sin(45°) = n_o \sin(\theta)$, dus $\theta = 52.087°$ t.o.v. de normaal. Bij het verlaten van het prisma is de hoek van inval dus 7.087° en de uitgaande hoek kan gevonden worden via Snell. $n_o \sin(7.087°) = \sin(\theta)$ dus $\theta = 10.565 = 10.57°$.

o-straal. Snell geeft $n_o \sin(45°) = n_e \sin(\theta)$, dus $\theta = 39.327°$ t.o.v. de normaal. Bij het verlaten van het prisma is de hoek van inval dus 5.6725° en de uitgaande hoek kan gevonden worden via Snell. $n_e \sin(5.6725°) = \sin(\theta)$ dus $\theta = 9.432°$.

De gevraagde hoek is dus 20.00°.

d) (2 p)



Opgave 5

a) (2 p) Het gaat hier om diffractie aan de ronde telescooplens. $\sin\theta = 1.22\lambda/D$. Voor kleine hoek maken we gebruik van $\sin\theta \approx \tan\theta = x/3.84 \times 10^5 km$, waarbij x de gevraagde afstand. $x = 1.22 \times 532 \times 10^{-9}/0.75 \times 3.84 \times 10^8 = 332.8 = 330$ m.

b) (2 p) De gevraagde functie is de Besselfunctie J_1. Deze heeft een centraal maximum, een aantal lagere nevenmaxima. De bij a) berekende waarde komt overeen met de waarde in het eerste minimum. Dit is een maat voor de breedte van de piek.

c) (2 p) We gaan uit van een uniforme belichting van de 330 m grote spot. De fractie wordt dan gegeven door de verhouding van de oppervlakte van de retroreflector t.o.v. de bundel. $1/\pi(0.45/330)^2 \approx 6 \times 10^{-7}$ (orde 10^{-6})

d) (2 p) Het gaat nu om diffractie van een vierkant object: $\sin\theta = \lambda/D$. De spot op aarde is dan $x = 532 \times 10^{-9}/0.45 \times 3.84 \times 10^8 = 454$ m $= 450$ m.

e) (2 p) De fractie die wordt opgevangen op aarde door de telescoop met 0.75 m diameter is $\pi(0.75/450)^2 = 8.7 \times 10^{-6}$ (orde 10^{-5}). Er blijft dus iets van orde 10^{-11} over van de puls die 2.7×10^{13} photonen bevatte. We krijgen dus een signaal terug van orde 100 photonen.

Opgave 6

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$\beta = 1/2kb\sin\theta$$

$$\alpha = 1/2ka\sin\theta$$

a) (3p) De minima bij $x = 2.44$ en 4.88 mm worden veroorzaakt door het diffractiepatroon van een enkele spleet met eindige breedte.

b) (3p) De breedte van de spleten kan men halen uit het eerste nulpunt van het diffractiepatroon van een enkele spleet. Dit nulpunt ligt by $\sin\theta = \lambda/b$. $\sin\theta \approx \tan\theta = 2.44/500$, dus $b = 488 \times 10^{-9} \times 500/2.44 = 10^{-4}$ m (100 μm).

c) (4p) De afstand tussen de spleten volgt uit de afstand tussen de hoofdmaxima van het interferentiepatroon. Het eerste ($m = 1$) maximum ligt by $\sin\theta = \lambda/a$. Omdat het $m = 3$ maximum van het interferentiepatroon van de tralie samenvalt met het eerste minimum van het diffractie patroon van een enkele spleet weten we dat $\sin\theta \approx \tan\theta = (1/3)(2.44/500)$, dus $a = 3b = 3 \times 10^{-4}$ m (300 μm).