Uitwerkingen tentamen optica

11 april 2002

Opgave 1

a) (3pt) Voor de "visibility", "fringe contrast" of zichtbaarheid geldt:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{1}$$

waarbij

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos\delta \text{ met } \cos\delta = 1, \\ I_{min} &= I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos\delta \text{ met } \cos\delta = -1, \end{aligned}$$

zodat

$$V = 2\frac{\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B}. \tag{2}$$

Invullen van $I_A = T_1 T_4 I_0$ en $I_B = R_1 R_4 I_0$ met $T_1 = 0.4$, $R_1 = 0.6$, $T_2 = 0.5$ en $R_2 = 0.5$, geeft $V = 0.980 = 98.0\%$.

b) (3pt) Uit $V = 1$ volgt via vgl. (2), of vgl. (1) met $I_{min} = 0$

$$\begin{aligned} I_A + I_B - 2\sqrt{I_A I_B} &= 0 \\ 4 I_A I_B &= (I_A + I_B)^2 \\ I_A^2 - 2 I_A I_B + I_B^2 &= 0 \\ (I_A - I_B)^2 &= 0 \\ I_A &= I_B. \end{aligned} \tag{3}$$

Dit geldt als $R_1 R_4 = T_1 T_4$. Spiegel 4 verandert:

$$\begin{aligned} 0.6 R_4 = 0.4 T_4 &\quad \wedge \quad T_4 = 1 - R_4 \\ 0.6 R_4 = 0.4 (1 - R_4) &\quad \wedge \quad T_4 = 1 - R_4 \\ R_4 = 0.4 &\quad \wedge \quad T_4 = 0.6 \end{aligned}$$

Dus spiegel 4 moet vervangen worden door een spiegel met een reflectiviteit van 0.4 en een transmissie van 0.6.

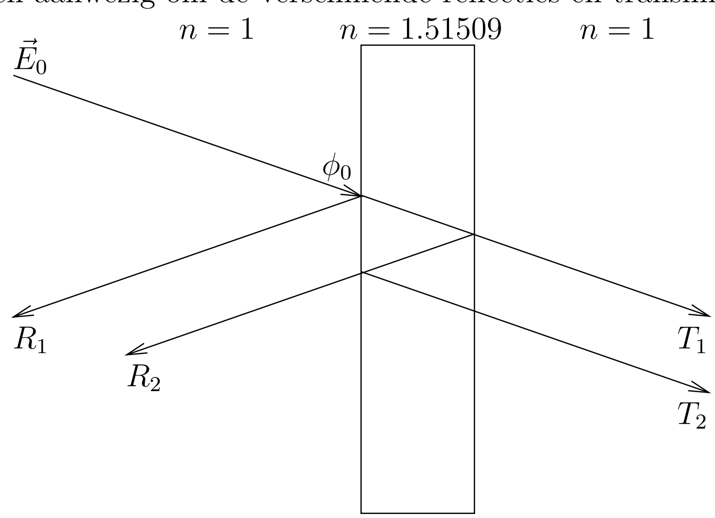
c) (2pt) De half-lambda plaat (HWP) onder 45° zorgt dat de uitgaande polarisatie na de plaat 90° verdraait is t.o.v. de ingaande: de polarisaties in arm A en B staan nu dus loodrecht op elkaar. Voor de interferentieterm geldt $2\vec{E}_A \vec{E}_B \cos\delta = 0$ aangezien $\vec{E}_A \perp \vec{E}_B$. Er treedt dus geen interferentie op. Aangezien I_A en I_B verder niet veranderen, bij verandering van armlengte, blijft V onafhankelijk van de armlengte. Het scherm wordt dus continu belicht met constante irradiantie $(I_A + I_B)$.

d) (2pt) Aangezien het verschil tussen de Mach-Zehnder (MZ) en de Michelson (M) interferometer is dat arm B (en ook A) 2 maal wordt doorlopen bij de laatste, i.p.v. 1 maal bij de eerste, voordat het licht kan interfereren, is elk element van dikte t in de MZ equivalent met een element van dikte $t/2$ in de M, mits symmetrisch onder spiegeling. Qua dikte moeten we dus een kwart-lambda plaat (QWP) gebruiken, en deze is ook symmetrisch onder spiegeling want:

- Na één keer doorlopen van de QWP, van rechts naar links, loopt de veld component langs de snelle as een kwart golflengte voor t.o.v. die langs de trage as.
- De spiegel keert vervolgens de vootplantingsrichting van het licht om, maar de componenten langs de snelle en trage as blijven gelijk.
- Na de tweede keer doorlopen van de QWP, van links naar rechts, loopt de snelle-as component dus een half lambda voor op de trage-as component.

Opgave 2

a) (1pt) Zie figuur. De stralen breken niet in het glas omdat ze eigenlijk loodrecht invallen. De invalshoek is alleen aanwezig om de verschillende reflecties en transmissies aan te geven.



b) (3pt) Loodrechte inval, dus:

$$\begin{aligned} R_1 &: \Delta\phi_1^R = \phi_1^R - \phi_0 = \pi \text{ (fasesprong)}, \\ T_1 &: \Delta\phi_1^T = nt\frac{2\pi}{\lambda} = 47.9\pi, \\ R_2 &: \Delta\phi_2^R = 2nt\frac{2\pi}{\lambda} = 95.7\pi, \\ T_2 &: \Delta\phi_2^T = 3nt\frac{2\pi}{\lambda} = 143.6\pi, \end{aligned} \tag{4}$$

c) (2pt) Er geldt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \left(= \frac{1 - \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{n_2}{n_1}} \right) \\ r &= -0.205 < 0. \end{aligned}$$

Dit is negatief, vanwege de fasesprong van π (want $e^{i\pi} = -1$).

d) (4pt) Constructieve interferentie (bij 2 bundels):

$$\Delta_{totaal} = k\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{Z})$$

met

$$\Delta_{totaal} = \delta \frac{\lambda}{2\pi} \left(+\phi_{sprong}\right).$$

Voor transmissie maximum:

$$\begin{aligned} \delta &= (\Delta\phi)_2^T - (\Delta\phi)_1^T = 2nt\frac{2\pi}{\lambda} \\ k\lambda &= 2nt \\ k\,(T = 293\text{ K}) &= 47.9. \end{aligned}$$

Eerstvolgende maximum voor $k = 48$, dus bij

$$\begin{aligned} t' &= \frac{k\lambda}{2n} = 10.024\ \mu\text{m} \\ \Delta t &= t' - t\,(T = 293\text{ K}) = 24\text{ nm}. \end{aligned} \tag{5}$$

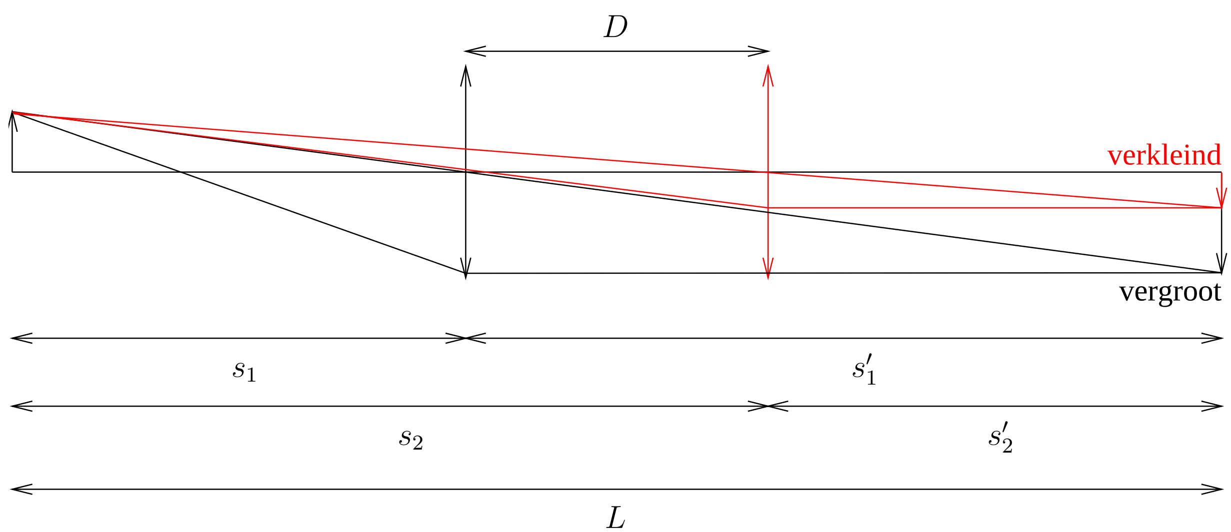
Nu is $\frac{\Delta t}{t} = \alpha \Delta T$ met α de lin. uitzettingscoëfficient. Let op: $[\alpha] = \text{K}^{-1}$, niet m/K! We vinden dan dat $\Delta T = 338$ K.

Voor reflectie minimum geldt hetzlefde verhaal, met

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = 2nt.$$

We vinden dat de temperatuur met $1.81 \cdot 10^3$ K moet veranderen. De conclusie die we hieruit kunnen trekken is dat een interferentiepatroon gevormd door een erg dun plaatje praktisch ongevoelig is voor temperatuurschommelingen.

Opgave 3



a) (1pt)

b) (3pt) Verklaring m.b.v. de lenzenformule:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{s + s'}{ss'}. \tag{6}$$

We weten dat $s + s' = L$ en passen dit toe in vgl. (6), de lenzenformule:

$$\begin{aligned} s\,(L - s) &= Lf \\ s = \frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - Lf} \quad &\vee \quad s = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - Lf}. \end{aligned}$$

Uiteraard zijn er, afhankelijk van de waarde van de discriminant, twee mogelijkheden met oplossingen:

- 2 oplossingen zijn mogelijk voor $L > 4f$,
- 1 oplossing is mogelijk voor $L = 4f$.

Voor $L = 4f$ vinden we dat de lineaire vergroting -1 is (vergroting 1 en omgekeerde oriëntatie). Argumenten analoog aan "s en s' zijn verwisselbaar in vgl. (6)" zijn onvolledig, aangezien zij geen rekening houden met de extra voorwaarde $s + s' = L$, wat de beperking $L \geq 4f$ oplevert!

c) (2pt) We weten dat $s_1 = s_2'$ en $s_2 = s_1'$. Dit volgtnamelijk uit berekeningen gemaakt bij het vorige onderdeel. We kunnen dit ook vinden door de volgende gegevens te combineren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'}, \\ L = s_1 + s_1' &= s_2 + s_2'. \end{aligned} \tag{7}$$

We weten ook dat $s_1 <> s_1'$ en als we aannemen dat $s_1 < s_1' = s_2$, zoals in de figuur, dan vinden we dat in geval 1 $|M| = s_1'/s_1 > 1$, dus vergroting, en in geval 2 $|M| = s_2'/s_2 < 1$, dus verkleining.

d) (1pt) Zie vgl. (6).

e) (2pt) Zie onderdeel a): $L - D = s_1 + s_2'$, dus $D = L - s_1 - s_2'$. Of m.b.v. onderdeel a) en vanwege symmetrie $D = s_1' - s_1 = s_2 - s_2' = |s - s'|$. En voor L geldt $L = s_1 + s_1' = s_2 + s_2' = s + s'$.

f) (1pt) We combineren vgl. (6) en

$$s_1 = \frac{L - D}{2}, \quad s_1' = \frac{L + D}{2},$$

en vinden

$$f = \frac{L^2 - D^2}{4L}.$$

(2pt) Een andere methode is m.b.v. b):

$$\begin{aligned} D &= s_2' - s_1 = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - Lf} \\ D^2 &= 4\left(\frac{L}{2}\right)^2 - Lf \\ f &= \frac{L^2 - D^2}{4L}. \end{aligned}$$

Opgave 4

a) (1pt) $I_{uit} = 0$ want de TA's van de polarisatoren staan loodrecht op elkaar.

b) (2pt) De irradiantie na de eerste polarisator $I_1 = \frac{1}{2} I_0$, want ongepolariseerd licht bestaat "voor de helft" uit horizontaal, en "voor de helft" uit verticaal gepolariseerd licht. Eigenlijk: $I_1 = I_0 \int d\theta \, (\cos\theta)^2 = \frac{1}{2} I_0$. De HWP verandert niets aan de *grootte* van het electrische veld, dus ook niets aan de intensiteit. Er is sprake van een inval langs een as die 45° gedraaid is t.o.v. de snelle as, dus de polarisatie wordt precies 90° gedraaid, en wordt dus precies parallel aan de transmissie as van de tweede polarisator. Dus $I_{uit} = I_2 = I_1 = \frac{1}{2} I_0$.

c) (2pt) $v = c/n$, dus trage as met $n_S = 1.430$ en snelle as met $n_F = 1.420$.

d) (2pt) Fase verschil tussen de snelle en trage as componenten:

$$\delta = (n_S - n_F)\, kL \quad \left(k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Minimale lengte nodig voor een HWP ($\delta = \pi$) is:

$$L = \frac{\delta}{k} \frac{1}{n_S - n_F} = \frac{\lambda/2}{n_S - n_F} = 25 \ \mu\text{m}.$$

e) (3pt) Volgens onderdeel b) zal $I_1 = \frac{1}{2} I_0$, en $\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \hat{H}$, met $\hat{H}$ de eenheidsvector langs de horizontale as (transmissie as van de eerste polarisator). We voeren nu de eenheidsvectoren $\hat{Q}$ en $\hat{V}$ in, die respectievelijk langs de transmissie as van de tweede en derde polarisator (die verticaal staat) liggen. Dan volgt dat

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= \left|\vec{E}_1\right| \cos(60°)\, \hat{Q}, \\
\vec{E}_3 &= \left|\vec{E}_2\right| \cos(30°)\, \hat{V}, \\
I_{uit} &= I_3 = \frac{1}{2} (\cos 30°)^2 (\cos 60°)^2 I_0 = 0.0938 I_0.
\end{aligned}$$

Opgave 5

a) (2pt) Het Rayleigh criterium is

$$\Delta\theta_{min} = \frac{1.22\lambda}{D}, \tag{8}$$

met $\Delta\theta_{min}$ de openingshoek tussen lichtstralen afkomstig van de twee stokken, λ de (gemiddelde) golflengte van het licht en D de diameter van de pupil.

Voor een afstand L van de stokken af, kunnen we de twee nog onderscheiden:

$$L = \frac{W}{\Delta\theta_{min}} = \frac{WD}{1.22\lambda} = 261 \text{ m},$$

waarbij we de afstand tussen de stokken W genoemd hebben. Merk op dat we in de berekeningen werken met de paraxiale benadering.

b) (2pt) Stel, zonder verrekijker is de waargenomen afstand tussen de twee, diffractie-verbrede, stokken $\Delta X = W'$ en de hoek-breedte van de diffractie-verbrede stokken $\Delta\theta = (\Delta\theta)'$, dan geldt dat met slechts de vergroting M van de verrekijker $\Delta X = MW'$ en $\Delta\theta = M\,(\Delta\theta)'$. We zien dus dat de verhouding gelijk blijft en dat de stokken nog steeds niet op te lossen zijn.

c) (2pt) De resolutie moet groter zijn, dus de oogpupil moet effectief vergroot worden. Dus de "ingangspupil" (= diameter van het objectief) moet groter zijn. Invullen van vgl. (8) geeft een $D_{verrekijker}$ van minimaal 4.03 mm.