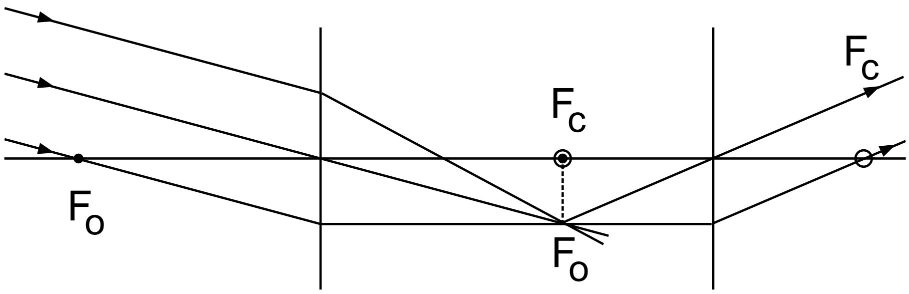
Uitwerkingen Hertentamen Optica

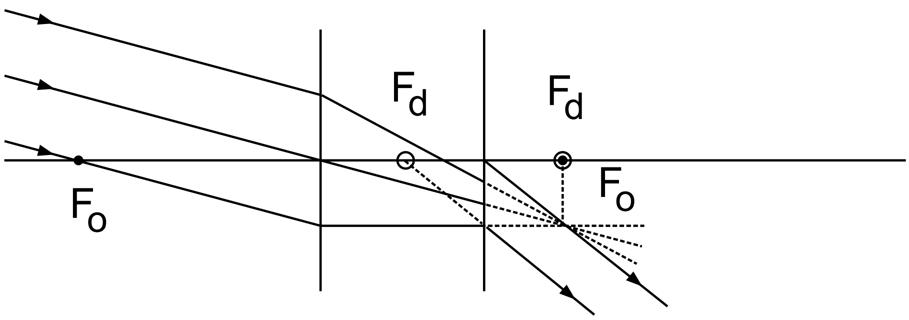
2 april 2004

Opgave 1
Gevraagd is om te laten zien dat de gegeven vergelijking een *lopende* golf is. Om dit te doen is het voldoende om te laten zien dat hij de vorm $f(x \pm vt)$ heeft, want dit is de algemene oplossing van de golfvergelijking. Een andere, maar equivalente, methode is het invullen van de functie F in de golfvergelijking en de tweede afgeleiden naar plaats en tijd van F te berekenen (in feite het opnieuw afleiden van voornoemde algemene oplossing voor dit specifieke geval). Deze laatste, omslachtige methode is hier niet uitgewerkt.

Allereerst is het duidelijk dat moet gelden $B \neq 0$ en $C \neq 0$, want anders hangt de functie niet meer van de plaats en tijd af. Verder moet $x^2 + t^2 + Dxt$ te herschrijven zijn tot $(x \pm vt)^2$ om te voldoen aan de golfvergelijking, dus moet gelden $D = \pm 2$ (en $v = \pm 1$ dus). Tenslotte, de keuze van A is vrij mits $A \epsilon R$.

Opgave 2





a) Zie figuur: de invallende stralen zijn parallel (het voorwerp is ver weg), dus het beeld bevindt zich in het brandvlak van het objectief. Het oculair is zodanig geplaatst, dat zijn brandpunt in het beeldvlak van het objectief ligt, dus in het brandpunt van het objectief (dit zodat er met ongeaccomodeerd oog naar gekeken kan worden, dit is het minst vermoeiend voor het oog).

b) De afstanden tussen het objectief en oculair in beide situaties zijn $(f_o + f_c)$ en $(f_o - f_c)$, respectievelijk. Er geldt $|M_1| = |M_2|$, waarbij M de hoekvergroting is (de enige zinvol te definiëren vergroting voor een telescoop). Nu is de afstand van het beeldpunt t.o.v het brandpunt van het objectief $y = f_o \tan(\alpha) = f_{c,d} \tan(\beta)$ en is de hoekvergroting $M_{1,2} = \beta/\alpha \approx f_o/f_{c,d}$ (paraxiale benadering). Er volgt dan $|f_c| = |f_d|$ en dus $f_c = -f_d$. Het gevraagde is dus $(f_o + f_c)/(f_o - f_c) = (M + 1)/(M - 1)$.

Opgave 3

a) De brewsterhoek wordt gegeven door $\tan \theta_B = n$, en dus $\theta_B = \arctan(n) = 55.8°$.

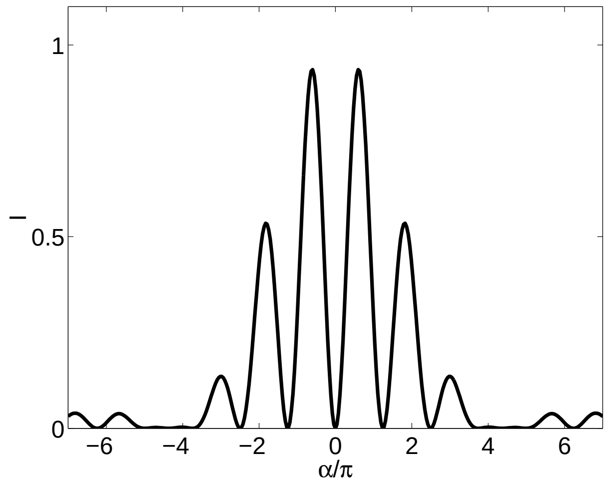
b) Lineair, loodrecht op het vlak van inval en breking (dus loodrecht op het papier).

c) Circulaire polarisatie.

d) Lineaire polarisatie, nu in het vlak van het papier!

e) Niets.

Opgave 4



a) Dat is het beeld van de bron geproduceerd door de spiegel, dat op afstand $a/2$ achter/in de spiegel ligt.

b) Op het raakpunt zijn de weglengtes van lichtstralen die uit de twee bronnen komen gelijk. Er is echter wel een fasesprong van π door de reflectie aan de spiegel, dus er ligt een minimum in dit raakpunt.

c) Maxima ontstaan op punten waarvoor het weglengteverschil gelijk is aan $(m+1/2)\lambda = a \sin\theta \approx a\theta$ (paraxiale benadering); de half is vanwege dezelfde fasesprong als bij b) besproken. Voor het derde interferentiemaximum ($m = 2$) volgt de hoogte op het scherm y uit $y = L \tan\theta \approx L\theta \approx L(m + 1/2)\lambda/a$.

d) Nu spelen zowel interferentie als diffractie een rol en zien we voor de intensiteit het product van $\sin^2 \alpha$ en $(\sin(\beta)/\beta)^2$, waarin $\alpha = k\sin(\theta)a/2$ en $\beta = k\sin(\theta)b/2$ (zie P&P blz. 338). Aangezien de maxima van de $\sin^2 \alpha$-term liggen op $\alpha = \pi/2, 3\pi/2, ...$ en de minima van de $(\sin(\beta)/\beta)^2$-term op $\beta = \pi, 2\pi, ...$, wat correpondeert met $\alpha = 3.5\beta = 7\pi/2, 7\pi, ...$, ontbreken de interferentie maxima op de punten met $\alpha = 7\pi/2, 21\pi/2, ...$ Zie de bovenstaande figuur voor de schets van het intensiteitspatroon.

Opgave 5

De intensiteiten na elke polarizer (1,2=X,3) noemen we I_1, I_2 en I_3, en de invallende intensiteit noemen we I_0. Ze worden gegeven door: $I_1 = I_0/2$ (ongepolariseerd licht valt in), $I_2 = I_1 \cos^2(\alpha)$ (kwadraat vanwege $I \propto E^2$), en $I_3 = I_2 \cos^2(\pi/2 - \alpha) = I_2 \sin^2(\alpha)$ ($90° - \alpha$ vanwege het feit dat α t.o.v. polarizer 1 gedefiniëerd is en polarizer 3 een hoek van 90° met 1 maakt). Alles bij elkaar genomen geeft dat dus: $I_3 = (I_0/2)\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) = I_0/8 \sin^2(2\alpha)$.

Opgave 6

a) De amplitude reflectiecoëfficient onder loodrechte inval wordt gegeven door $r = (n_1 - n_2/(n_1 + n_2) = (1.0003 - 1.4734)/(1.0003 + 1.4734) = -0.1913$ (minteken vanwege de fasesprong bij reflectie van optisch dun naar optisch dicht).

b) Omdat de reflectie amplitude zo klein is kunnen we meervoudige reflecties verwaarlozen en zien we vooral interferentie tussen de directe reflecties aan de voor- en achterfacetten. Het resultaat lijkt dus sterk op een $\cos^2$ patroon als functie van λ.

c) De interferentie voorwaarde voor een minimum in de reflectie is $m\lambda = 2n_{glas}t$, met plaatdikte t, aangenomen dat de bundel loodrecht invalt. Gevraagd is naar de golflengte-afstand $\Delta\lambda$ tussen twee naastgelegen minima (met $\Delta m = 1$). Deze volgt uit $\Delta m = \Delta\lambda \frac{\partial m}{\partial \lambda} \approx -2\Delta\lambda\, n_{glas}t/\lambda^2$. Hieruit volgt dan $\Delta\lambda = -\Delta m\, \lambda^2/2n_{glas}t = -(500\,\text{nm})^2/(2 \times 1.4734 \times 4.1356\,\text{mm}) = 0.0205$ nm. Alternatieve berekening: we kunnen de interferentie orde schatten via $m \approx 2n_{glas}t/\lambda \approx 2.437 \times 10^{-4}$, waarna $\Delta\lambda$ volgt uit $\Delta\lambda \approx \lambda/m \approx 0.0205$ nm.

d) Analoog aan c), maar nu is $\Delta\lambda = -\Delta m\, \lambda^2/2n_{glas}t = -(700\,\text{nm})^2/(2 \times 1.4734 \times 4.1356\,\text{mm}) = 0.0402$ nm.

e) Als we de frequentie ν in plaats van de golflengte als parameter gebruiken, dan wordt de interferentie voorwaarde $mc/\nu = 2n_{glas}t$, en $\Delta m = \Delta\nu \frac{\partial m}{\partial \nu}$. Aangezien $\frac{\partial m}{\partial \nu} = 2n_{glas}t/c =$ constant, is de frequentie-afstand tussen twee opeenvolgende pieken (dus met $\Delta m = 1$) $\Delta\nu = c/2n_{glas}t$ niet meer afhankelijk van de golflengte (of frequentie).

f) Zie figuur blz. 239 P&P, de gevraagde curve zal lijken op de in de x-as gespiegelde curve met $r = 0.9$, gebruik makend van $R = 1 - T$. Vergeleken met b) zijn de pieken veel hoger (grotere reflectie) en nauwer (t.g.v. de meervoudige interferentie).

Opgave 7

a) De voorwaarde voor constructieve interferentie is $m\lambda = a \sin\theta$. Met de gegeven parameters ontstaan er dan buigingsmaxima onder de hoeken $\theta = \arcsin(m\lambda/a) = -39.0°, 0°, 39.0°$ (met $m = -1, 0, 1$).

b) De hoekdispersie wordt gegeven door $d\theta/d\lambda = 1/(d\lambda/d\theta) = m/(a\cos\theta)$. Voor de gegeven parameters is de hoekdispersie dan $1/(1.24\,\mu\text{m}\times \cos 39°) = 1.038\,\text{rad}/\mu\text{m}$ voor de $\pm$eerste ordes, en $0\,\text{rad}/\mu\text{m}$ voor de 0-de orde.

c) Nu treedt constructieve interferentie op onder de volgende voorwaarde: $m\lambda = a(\sin\theta + \sin\theta_i)$. Met de gegeven parameters vinden we de volgende hoeken waaronder maxima verschijnen: $\arcsin(m \times 780\,\text{nm}/1.24\,\mu\text{m} - 1/2) = -30.0°, 7.41°, 49.3°$, voor $m = 0, 1, 2$. Dus er zijn 3 diffractie-ordes te zien.