Uitwerkingen Tentamen Optica

13 februari 2004

Opgave 1

Gevraagd is om te laten zien dat de gegeven vergelijking een *lopende* golf is. Dit is niet hetzelfde als een *harmonische* golf (sinus of cosinus)! De verzameling van lopende golven bevat de verzameling van harmonische golven, maar ook nog andere (dus niet-harmonische) golven. Om te laten zien dat een vergelijking een lopende golf beschrijft is het voldoende om te laten zien dat hij de vorm $f(x \pm vt)$ heeft, want dit is de algemene oplossing van de golfvergelijking.

a) $36z^2 - 12zt + t^2 = (6z - t)^2$ en dus $E(z,t) = 6\cosh((6z-t)^2) = f(z - vt)$, met $v = 1/6$. De amplitudo en frequentie volgen uit analoge definities als voor de harmonische golf $A\cos(kx - \omega t)$, met amplitude A, $\omega = v/k$ en frequentie $\nu = \omega/2\pi$. In ons geval geeft dit: $A = 6$ en $\nu = 1/2\pi$. Overigens valt even goed te beargumenteren dat de amplitudo en de frequentie niet gedefiniëerd zijn voor hyperbolische functies (omdat deze functies niet begrensd zijn op $z\epsilon\langle -\infty\,,\,\infty\rangle$).

b) $z^2 - t^2 = (z-t)(z+t) \neq f(z \pm vt)$, dus deze functie beschrijft geen lopende golf.

Opgave 2

a) Gebruik de lensmaker formule:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Aangezien hier geldt dat $R_1 = \infty$, $n_1 = 1.0$ en $n_2 = 1.5$ is

$$R = -\frac{n_2 - n_1}{n_1} f = -0.5f.$$

b) Op de plaats waar de stukken glas elkaar raken is er geen luchtlaag en treedt er dus geen interferentie op. Er wordt dus geen licht gereflecteerd en dit neem je waar als een donkere cirkel.

c) De voorwaarde voor constructieve interferentie is $m\lambda = 2nt + \Delta_r$, met Δ_r de netto "fasesprong" (eigenlijk "weglengte sprong") ten gevolge van externe reflecties. Hier vindt eenmaal een externe reflectie plaats van lucht aan glas (aan de glasplaat maar niet aan de lens), dus netto is $\Delta_r = \lambda/2$. Dit geeft dan voor de gevraagde dikte

$$t = (m - 1/2)\lambda/2n = 9.5 \times 500\,\text{nm}/2 = 2.38\,\mu\text{m}.$$

d) Gevraagd is naar de golflengte waarvoor, bij dezelfde laagdikte als bij c), het 11de maximum optreedt. Dit is het geval als $m_2\lambda_2 = m_1\lambda_1$, oftewel:

$$\lambda_2 = (m_1 - 1/2)/(m_2 - 1/2)\lambda_1 = (9.5/10.5) \times 500\,\text{nm} = 452\,\text{nm}.$$

e) Er geldt weer dezelfde interferentie voorwaarde als bij c), maar nu is $\Delta_r = 0$, want er vinden nu 2 externe reflecties plaats: aan de lens (van $n = 1.5$ naar $n = 1.6$) en aan de diamant plaat (van $n = 1.6$ naar $n = 2.5$). Dit geeft als antwoord:

$$t = m\lambda/2n_{olie} = 10 \times 500\,\mathrm{nm}/(2 \times 1.6) = 1.56\,\mu\mathrm{m}.$$

f) Het interferentie patroon bestaat uit lichte en donkere parallelle lijnen.

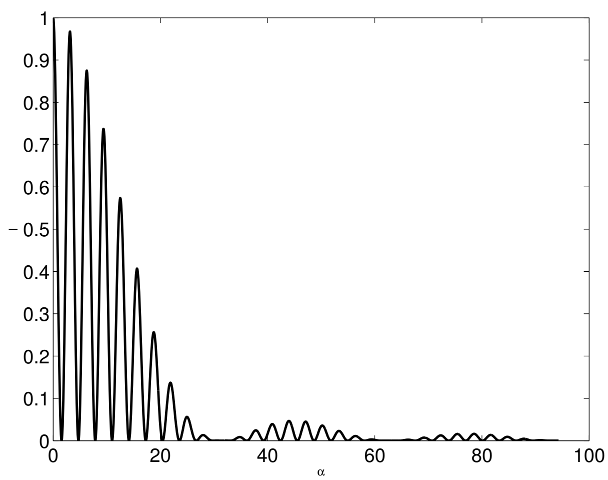
Opgave 3

a) De intensiteit na de eerste polarisator $I_1 = I_0/2$, met de polarisatie langs de transmissieas. De intensiteit na de half-lambda plaat is $I_h = I_1$, maar de polarisatie is gedraaid over 2α. De intensiteit na de tweede polarisator $I_2 = I_h \cos^2(\pi/4 - 2\alpha)$ en de transmissie is dan dus $T = \frac{1}{2}\cos^2(\pi/4 - 2\alpha) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\pi/2 - 4\alpha)) = \frac{1}{4}(1 + \sin(4\alpha))$.

Opgave 4

a) Er geldt hier dat $b/a = 10$, dus de interferentiemaxima met $m = 10, 20, ...$ vallen weg.

b) Zie Figuur (Let op: de eenheid langs de horizontale as is niet gedeeld door π).



c) Weer geldt dat maxima optreden als $m\lambda = a \sin\theta$, dus $\theta = \arcsin(21 \times 500\,\mathrm{nm}/100\,\mu\mathrm{m}) = 6.03°$

d) De interferentieminima vind je bij $(m - 1/2)\lambda = a \sin\theta$, dus $\lambda = 21/20.5 \times 500\,\mathrm{nm} = 512\,\mathrm{nm}$ (de $\pm$eerste orde minima zitten aan weerszijden van het 0-de orde maximum).

e) Er treedt enkel diffractie op in deze richting, dus het intensiteitspatroon is een sinc^2 functie (zie boek).

f) Nee, want voor cirkelvormige gaten is de omhullende diffractiecurve een Bessel functie van de eerste soort. Deze functie heeft nulpunten die niet gehele veelvouden van π zijn, en dus niet samenvallen met maxima van de interferentiecurve (met gehele ordegetallen m).

Opgave 5

a) De minimale afmetingen van het beeld van de hemellichamen, zoals gevormd door het objectief, wordt beperkt door diffractie aan de objectief apertuur. Volgens het criterium van Rayleigh wordt de hoekafstand tussen twee voorwerpen ver weg van de lens, waarvoor geldt dat hun beelden nog net onderscheidbaar zijn, gegeven door $\theta_{min} = 1.22\lambda/D$. We vinden dus dat de gevraagde minimale hoek is $\theta = 1.22 \times 500$ nm /25 mm $= 2.44 \times 10^{-5}$ rad $= (1.4 \times 10^{-3})^\circ$.

b) In wit licht zijn alle golflengten aanwezig. Verder weten we dat, voor een gegeven apertuurgrootte, de diffractiehoek toeneemt bij toenemende golflengte ($\theta_{min} \sim \lambda/D$). Dus de diameter van het beeld dat we van de maan zien wordt bepaald door de grote (=rode) golflengten. Tegelijkertijd is bij de randen van het beeld de intensiteit van deze rode golflengten veel groter dan van de blauwe, dus is het beeld daar rood gekleurd.

Opgave 6

a) Gebruik $2d\cos\theta = m\lambda$, met hier $\theta = 0$, en dus $m = 2d/\lambda = 2 \times 2$ mm/500 nm= 8000.

b) Bij een Michelson interferometer is in het midden het ordegetal maximaal, dus de 5e fringe vanuit het midden heeft $m = 7995$. De hoek die hierbij hoort volgt uit $\cos\theta = m\lambda/2d$, oftewel $\theta = \arccos(7995/8000)) = 2.0^\circ = 0.035$ rad.

c) In dit geval geldt de volgende voorwaarde voor een interferentie maximum: $2(n_{gas} - n_{lucht})L = \Delta m\lambda$. Hieruit volgt dat $n_{gas} = \Delta m\lambda/2L + n_{lucht} = 30 \times 500$ nm $/(2 \times 4$ cm $) + 1.0000 = 1.00019$.

d) Aangezien een van de optische assen van de kwartlambda-plaat langs de polarisatie van het invallende licht staat, gebeurt er niets met de polarisatie van dit licht. Blijft over het effect van de optische dikte van het plaatje en het weglengteverschil dat dit veroorzaakt met het glasplaatje in de andere arm: $2d(n_e - n) = \Delta m\lambda$ en $\Delta m = 2d(n_e - n)/\lambda = 2 \times 125\,\mu\text{m} \times (1.5638 - 1.550)/500$ nm $= 6.7$ fringes.

e) Nu staan de assen van de kwartlambda-plaat onder 45°met de polarisatie van het invallende licht, dus gebeurt er wel iets met de polarisatie van het licht. Er zijn twee manieren om dit effect te beredeneren: 1) Stel er valt verticaal gepolariseerd licht in. Dit wordt omgezet in (stel) rechtshandig circulair gepolariseerd licht. Na de reflectie op de spiegel is de draairichting van het veld niet veranderd, maar wel de bewegingsrichting, dus netto is het licht nu linkshandig gepolariseerd. Als het weer door de plaat heengaat, wordt het omgezet in horizontaal gepolariseerd licht. Het electrisch veld van dit licht staat loodrecht op dat van de andere arm, dus er treedt geen interferentie meer op aan de uitgang. 2) Je kan de som van kwartlambda-plaat, spiegel en kwartlambda-plaat even goed beschrijven door een enkele halflambda-plaat. Deze draait de polarisatie over twee keer de hoek van zijn optische assen met de inkomende polarisatie, in dit geval over 90°, zodat het licht horizontaal gepolariseerd wordt. Het electrisch veld in deze arm staat dus loodrecht op dat van de andere arm, dus er treedt geen interferentie meer op aan de uitgang.

f) Het weglengteverschil dat optreedt tussen twee lichtbundels, gepolariseerd langs de trage, resp. snelle as, die de kwartlambda-plaat doorlopen is gelijk aan $t(n_o - n_e)$. Dit weglengteverschil moet per definitie gelijk zijn aan $\lambda/4$ (aannemende dat we een zogenaamd nulde-orde plaatje hebben), dus $n_o = \lambda/4t + n_e = 500\,\text{nm}/(4 \times 125\,\mu\text{m}) + 1.5634 = 1.5644$.

Opgave 7

a) Voor de eerste bundel is het electrisch veld gelijk aan: $E_1 = tt'E_{in} = (1 - r^2)E_{in}$. De tweede bundel ondergaat nog twee extra reflecties, zodat: $E_2 = (r')^2 E_1 = r^2 E_1$. De intensiteiten van beide bundels zijn dan dus $I_1 = (1 - r^2)^2 I_{in}$ en $I_2 = (1 - r^2)^2 r^4 I_{in}$.

b) In het algemeen wordt de zichtbaarheid van interferentiestrepen bij twee-bundel-interferentie gegeven door

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Hierin is $I_{max} = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2E_1^* E_2$ en $I_{min} = |E_1|^2 + |E_2|^2 - 2E_1^* E_2$, dus we kunnen V schrijven als:

$$V = \frac{2E_1^* E_2}{|E_1|^2 + |E_2|^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2r^2}{1 + r^4} = 0.080$$

c) Lineair gepolariseerd, loodrecht op het vlak van inval en reflectie, omdat de electrisch veld component *in* het vlak 0 is bij de Brewster hoek.