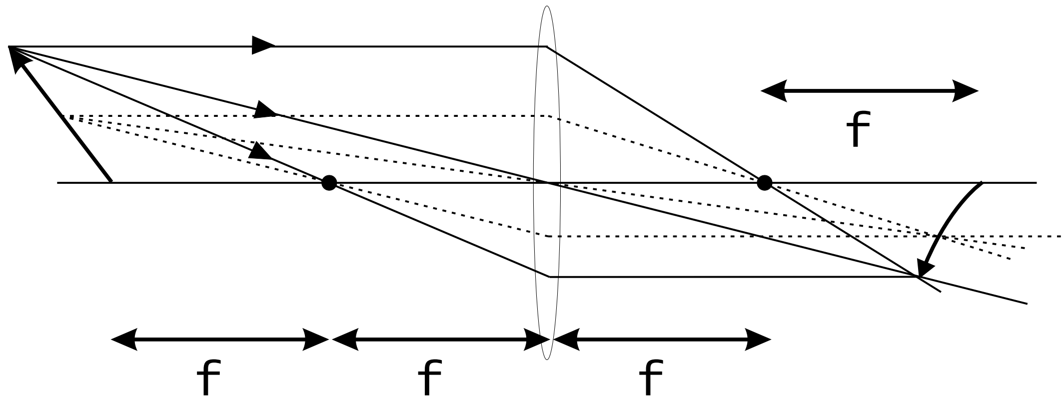
Uitwerkingen Toets Optica

22 december 2003

Opgave 1



a) Constructiemethode:

- de staart van de pijl bevindt zich op afstand $2f$ van de lens, dus het beeld van de staart bevindt zich op

$$s'_{\text{staart}} = (1/f - 1/s_{\text{staart}})^{-1} = (1/f - 1/2f)^{-1} = 2f,$$

  aan de andere kant van de lens.

- het beeld van de pijlpunt kan worden gevonden door middel van de drie bekende lichtpaden: 1) ongebroken rechtdoor door het optisch midden, 2) evenwijdig aan de optische as in, en door het brandpunt uit, 3) door het brandpunt in, en evenwijdig aan de optische as uit (zie figuur). Ter controle: op grond van de lensformule verwachten we dat het beeld van de pijlpunt dichterbij ligt dan $2f$ (dus dichterbij dan het beeld van de onderkant), want:

$$s_{\text{punt}} > 2f \Rightarrow \frac{1}{s'_{\text{punt}}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_{\text{punt}}} > \frac{1}{2f} \Rightarrow s'_{\text{punt}} < 2f$$

b) Het beeld is vervormd (dit wil zeggen: niet gelijkvormig aan het voorwerp, dus niet recht!), wat eenvoudig te zien is door een constructie te maken van de afbeelding van een punt halverwege de pijl (gestippelde lijnen in figuur). Dat deze vervorming optreedt komt doordat de lensformule niet-lineair is (hyperbolisch), of met andere woorden, dat de vergrotingen van voorwerpen op verschillende voorwerpsafstanden niet gelijk zijn.

Opgave 2

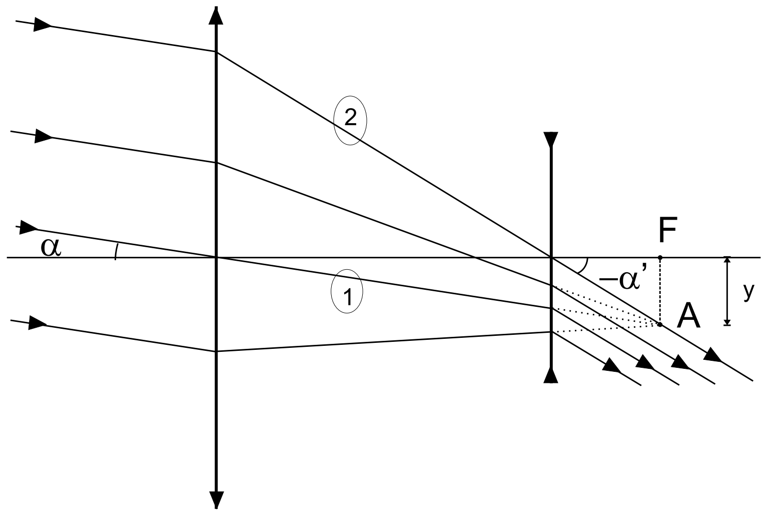
Bij deze opgave is het steeds voldoende om te gebruiken dat een lopende golf een functie van de vorm $f(x \pm vt)$ is (dit is de algemene oplossing van de golfvergelijking in 1 ruimte-dimensie).

a) $y(z,t) = 10(\pi z - 5t) = f(z - vt)$ en is dus een lopende golf met snelheid $v = 5/\pi$. De golflengte is niet gedefiniëerd voor deze golf (want het is geen harmonische golf) (eventueel $\lambda = \infty$).

b) $y(z,t) = 24(4^z 3^{-t})^{1/3} = 24\exp(\frac{1}{3}(z\ln 4 - t\ln 3)) = f(z - vt)$ en is dus een lopende golf met snelheid $v = \ln 3/\ln 4$. Ook voor deze golf is de golflengte niet gedefiniëerd.

c) $y(z,t) = 2100\sinh(z - 0.1t^2) \neq f(z - vt)$ en is dus geen lopende golf.

Opgave 3



a) Constructiemethode: er valt een parallele bundel in op de lens, dus het voorwerp ligt in het oneindige. Het beeld A van de objectief-lens ligt dan in het brandvlak van het objectief. De hoogte van het beeld wordt bepaald door de lichtstraal die ongebroken rechtdoor gaat door het optisch midden van de lens (en natuurlijk parallel loopt aan de lichtstralen voor de lens; deze straal is aangegeven met het cijfer 1 in figuur).

Het zo gevormde (tussen)beeld is het voorwerp voor het oculair, en aangezien in een telescoop de brandpunten van objectief en oculair samenvallen, ligt het beeld van het oculair dus weer in oneindig, dus er komt een parallelle bundel uit het oculair. De richting van de bundel wordt gegeven door de lichtstraal die ongebroken rechtdoor gaat door het optische middelpunt van het oculair en ook door beeldpunt van het objectief A heen loopt (straal 2 in figuur).

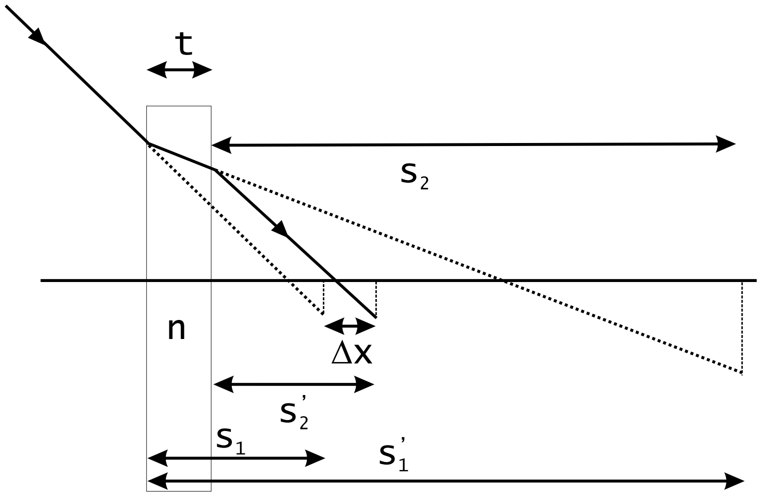
b) De (hoek)vergroting M van een telescoop is gedefiniëerd als

$$M = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = \frac{-y/f_{\mathrm{ocu}}}{y/f_{\mathrm{obj}}} = -\frac{f_{\mathrm{obj}}}{f_{\mathrm{ocu}}}$$

waaruit volgt dat

$$f_{\mathrm{ocu}} = -\frac{f_{\mathrm{obj}}}{M} = -\frac{1\,\mathrm{m}}{25} = -4\,\mathrm{cm}.$$

Ter controle: $f_{ocu} < 0$ want het is een holle, dus negatieve, lens.



c) We berekenen de positie van het verschoven beeld na het glasplaatje door twee keer breking-aan-een-enkel-(vlak)-oppervlak toe te passen, m.a.w.:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

met hier $R = \infty$ (want we gebruiken een *vlak* glasplaatje), dus

$$\frac{n_1}{s} = -\frac{n_2}{s'}.$$

Na breking aan het *eerste* oppervlak is de positie van het beeld s_1' gegeven door:

$$\frac{1}{s_1} = -\frac{n}{s_1'} \Leftrightarrow s_1' = -ns_1$$

(NB: $s_1 < 0$ dus $s_1' > 0$, klopt met figuur).

Nu is dit beeld het voorwerp voor de breking aan het *tweede* oppervlak, met voorwerpsafstand

$$s_2 = -(s_1' - t)$$

(minteken, want $s_2 < 0$, zie figuur) en dus is de positie van het beeld s_2' gegeven door:

$$\frac{n}{s_2} = -\frac{1}{s_2'} \Leftrightarrow s_2' = \frac{-s_2}{n} = \frac{s_1' - t}{n} = -\frac{ns_1 + t}{n} = -(\frac{t}{n} + s_1).$$

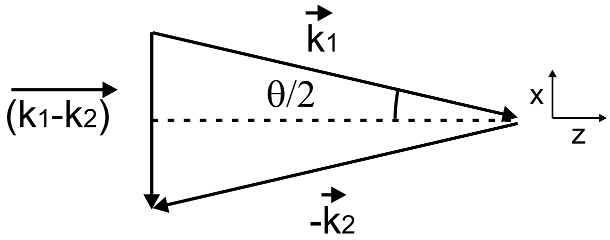
Let op: $s_2' > 0$, want $s_1 < 0$ en $|s_1| > t/n$ (het voorwerp ligt buiten het glas). De verschuiving van het beeld is dan

$$\Delta x = (s_2' + t) + s_1 = t(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n}t.$$

(Plusteken in eerste vergelijking, want $s_1 < 0$). Ter controle:

- kies $n = 1$ dan is $\Delta x = 0$ (dus zonder glasplaatje is er geen verschuiving) OK
- kies $n > 1$ dan is $\Delta x > 0$ (dus beeld schuift van de lens weg) OK.

Opgave 4



a) Gegeven is dat $\lambda_1 = \lambda_2$ en dus is ook $\omega_1 = \omega_2$ (want $\omega = c/\lambda$). We beschouwen de twee vlakke golven: $E_1 = E_0 \exp(i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t))$ en $E_2 = E_0 \exp(i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t))$. De irradiantie ("intensiteit") van het interferentiepatroon wordt gegeven door

$$I(\vec{r}) = \epsilon_0 c \left|\langle E_1 + E_2 \rangle_t\right|^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \left|e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right|^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \left(e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right)\left(e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right)$$

$$I(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 (1 + 1 + e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r}}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \left(2 + 2\cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r}]\right)$$

Nu is $|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|/2 = |\vec{k}_1| \sin(\theta/2)$ en ligt $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ in de $-x$-richting (zie figuur), dus

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = -|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|\hat{x} = -2k\sin(\theta/2)\hat{x}$$

en

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\vec{r} = -2kx\sin(\theta/2)$$

dus

$$I(\vec{r}) = 2I_0\left(1 + \cos[2kx\sin(\theta/2)\,]\right),$$

met $I_0 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$.

Alternatieve aanpak:

Het totale electrische veld wordt gegeven door

$$\begin{aligned} E_{tot}(\vec{r}) &= E_0 e^{-i\omega t}\left(e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right) && (1)\\ &= E_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\vec{k}_1+\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}}\left(e^{i\frac{\vec{k}_1-\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}} + e^{-i\frac{\vec{k}_1-\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}}\right) && (2)\\ &= E_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\vec{k}_1+\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}}\, 2\cos\left(\frac{\vec{k}_1-\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}\right) && (3)\end{aligned}$$

De totale intensiteit is dan

$$I(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_{tot}^* E_{tot} = 4I_0\cos^2\left(\frac{\vec{k}_1-\vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}\right),$$

met $I_0 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$, en er geldt (zie boven)

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = k\sin(\theta/2)\hat{x}$$

, dus

$$I(\vec{r}) = 4I_0\cos^2(k\sin(\theta/2)x).$$

b) De afstand tussen de knoopvlakken d is gelijk aan de afstand tussen de vlakken waar $I(\vec{r}) = 0$:

$$1 + \cos(2kx\sin(\theta/2)) = 0$$
$$\cos(2kx\sin(\theta/2)) = -1$$
$$2kx\sin(\theta/2) = \pi(1+2m),$$

met m een geheel getal, en de vergelijking van het $m-$de knoopvlak is

$$x_m = \frac{\pi}{2k\sin(\theta/2)}(1+2m) = \frac{\lambda}{4\sin(\theta/2)}(1+2m)$$

en

$$d = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{4\sin(\theta/2)}(1 + 2(m+1) - (1+2m))$$

en tenslotte

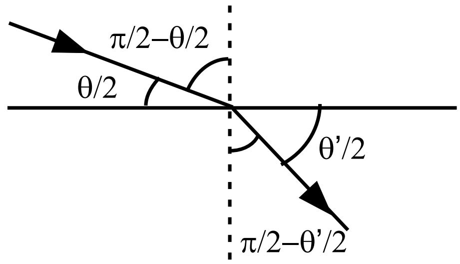
$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}.$$

Alternatieve manier:

De afstand tussen de knoopvlakken d volgt uit

$$\cos(k\sin(\theta/2)x) = 0$$

$$k\sin(\theta/2)x_m = m\pi \rightarrow d = x_{m+1} - x_m = \frac{\pi}{k\sin(\theta/2)} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}.$$



c) In het medium is de hoek tussen de k-vectoren θ'. Uit de wet van Snell volgt dat

$$\sin(\pi/2 - \theta/2) = n\sin(\pi/2 - \theta'/2)$$

$$\cos(\theta/2) = n\cos(\theta'/2) \Leftrightarrow \theta'/2 = \arccos\left(\frac{\cos(\theta/2)}{n}\right).$$

Ook geldt dat $\lambda' = \lambda/n$ (want in het medium is de lichtsnelheid c/n en ω is hetzelfde als daarbuiten). Dus in het medium is

$$d = \frac{\lambda'}{2\sin(\theta'/2)} = \frac{\lambda}{2n\sin(\arccos(\cos\theta/2n))}.$$

Een andere manier om het resultaat te schrijven is

$$d = \frac{\lambda}{2n\sqrt{1/2 - \cos\theta/2n}},$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt door te gebruiken dat

$$\sin(\theta'/2) = \sqrt{1-\cos^2(\theta'/2)} = \sqrt{1/2 - \cos(\theta')/2} = \sqrt{1/2 - \cos\theta/2n}.$$