Uitwerkingen tentamen Optica

18 februari 2005

Opgave 1

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

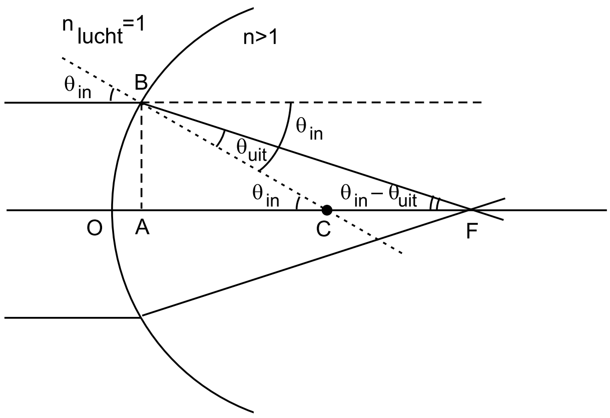
a) De eenheid van a moet zijn m/s, zoals te zien aan de vergelijking. $a = v$ is de snelheid waarmee de golf zich voortbeweegt.

b) Dit kan berekend worden door de functie $y = A\sin(kx - \omega t)$ in de vergelijking in te vullen. We maken gebruik van $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx - \omega t)$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$ en vinden tenslotte dat $a = v = \pm\frac{\omega}{k}$.

c) Bij licht is ω altijd constant onafhankelijk van het medium, terwijl k_{medium} en v_{medium} van de brekingsindex afhangen, namelijk: $k_{medium} = k_{vac}n$ en $v_{medium} = v_{vac}/n$.

Opgave 2

a) Zie figuur.



b) Hiervoor gebruiken we $f = OC + AF - AC$, $OC = BC = R$, $AC = R\cos(\theta_{in})$, $AB = R\sin(\theta_{in})$ en $AF = AB/\tan(\theta_{in} - \theta_{uit})$, met de hoeken zoals aangegeven in de figuur. Samen nemen geeft $f = R[1 + \frac{\sin(\theta_{in})}{\tan(\theta_{in} - \theta_{uit})} - \cos(\theta_{in})]$.

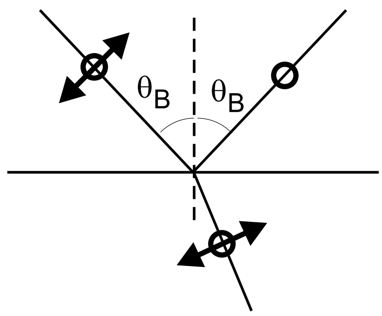
c) In de paraxiale limiet is $\sin\theta \approx \theta$, $\tan\theta \approx \theta$ en $\cos\theta \approx 1$. Hiermee wordt de wet van Snellius $1{*}\theta_{in} = n\theta_{uit}$. Herschrijven van de formule bij b) geeft dan $f = R[1+\frac{\theta_{in}}{\theta_{in}-\theta_{uit}}-1] = R\frac{n\theta_{uit}}{n\theta_{uit}-\theta_{uit}} = R\frac{n}{n-1}$.

d) Sferische aberratie is gelijk aan een afhankelijkheid van de brandpuntsafstand van een lens van de hoogte h waarop de lens wordt geraakt door een invallende lichtstraal, dus in formulevorm $f = f(h)$.

e) Chromatische aberratie is gelijk aan een afhankelijkheid van de brandpuntsafstand van een lens van de golflengte λ van het invallende licht, dus in formulevorm $f = f(\lambda)$. Chromatische aberratie ontstaat doordat de brekingsindex van het lensmateriaal van λ afhangt.

Opgave 3

a) Zie figuur. Ongepolariseerd zonlicht bevat evenveel parallelle (pijltjes) als loodrechte (cirkels) polarisatie. Na reflectie op het water zal het licht hoofdzakelijk loodrecht gepolariseerd zijn. Om dit loodrecht gepolariseerde licht (de schittering) goed te onderdrukken moet de transmissie as (TA) van de polarisatoren dus loodrecht op de polarisatierichting van het licht staan. Dit betekent dat de TA van de polarisatoren verticaal moet staan.

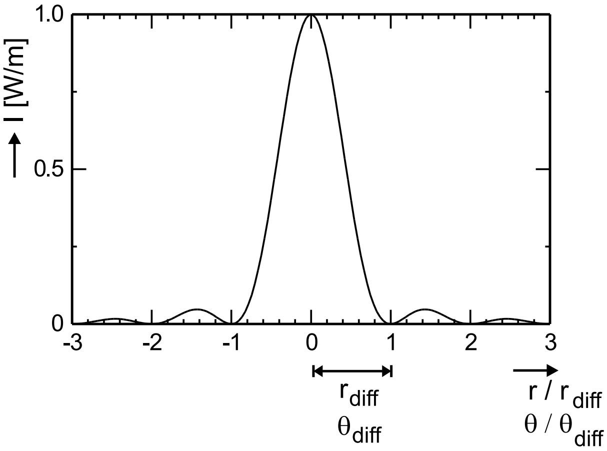


b) Zie figuur. Het parallel gepolariseerde licht verdwijnt als het invalt op het water onder de zogeheten Brewster-hoek θ_B. Deze wordt gegeven door $\theta_B = \arctan(n_{water}) = 53.1°$.

Opgave 4

a) De bundel wordt breder door diffractie, waarbij de diffractiehoek voor een ronde apertuur gegeven wordt door $\theta_{diff} = 1.22\lambda/D$, met D de diameter van de telescoop. Deze hoek is in de paraxiale limiet gelijk aan r/L, waarbij r de straal (zie ook b) van de spot op de maan is en L de afstand aarde-maan. Invullen geeft een straal van 81 m.

b) Zie figuur, de diffractiehoek θ_{diff} komt overeen met de afstand tussen het absolute maximum en het eerste minimum, oftewel de bij a) berekende straal.



c) We gaan er voor het gemak vanuit dat alle energie van de bundel gelijk verdeeld is over de spot op de maan. Dit betekent dan dat de teruggekaatste energie E_{refl} gegeven wordt door de verhouding van de oppervlakten van de reflector A_{refl} en de spot op de maan A_{maan} maal de totaal uitgezonden energie E_{in}: $E_{refl} \approx (\frac{A_{refl}}{A_{maan}})E_{in} = (\frac{\pi 0.15^2}{\pi 81^2})10\,\mu\text{J} \approx 3 \times 10^{-11}$ J.

d) Op analoge wijze als bij de voorgaande onderdelen berekenen we de diffractiehoek van de reflector en de spotgrootte op de aarde. $r_{aarde} = L\theta_{diff,refl} = 1.22\lambda L/D_{refl} = 813$ m. Hieruit volgt dat de energie ingevangen door de telescoop op aarde ongeveer gelijk is aan $E_{terug} \approx (\frac{A_{tele}}{A_{aarde}})E_{refl,maan} = (\frac{\pi 1.5^2}{\pi 813^2})3 \times 10^{-11}$ J $\approx 1 \times 10^{-16}$ J.

e) De energie van een foton van de gegeven golflengte is gelijk aan $E_{foton} = h\nu = hc/\lambda = 3.7 \times 10^{-19}$ J. Er worden dus ongeveer $1 \times 10^{-16}/3.7 \times 10^{-19} \approx 300$ fotonen per puls door de telescoop op aarde opgevangen.

Opgave 5

a) Er treedt een maximum op als het fase-verschil t.g.v. het optisch weglengteverschil en een evt. netto fasesprong gelijk is aan veelvoud van 2π. In dit geval treedt inderdaad een netto fasesprong op omdat, van alle heen- en teruggaande bundels in het zeepvlies, de eerste gereflecteerde bundel een externe reflectie (met fasesprong) ondergaat, terwijl alle andere gereflecteerde bundel interne reflecties (zonder fasesprong) ondergaan. Uitgedrukt in weglengtes betekent dit dat $\Delta_p + \Delta_f = m\lambda$, met $\Delta_p = 2nd$ en $\Delta_f = \lambda/2$. De laagdikte d is dus minimaal (bij $m = 1$) bij $d = \frac{(m-1/2)\lambda}{2n} = 103$ nm.

b) De veldsterkte van het invallende veld noemen we E_0. De veldsterkte van de sterkste reflectie E_1 wordt dan gegeven door $E_1 = rE_0$. De sterkte van de daarna sterkste reflectie is $E_2 = trt'E_0$. De reflectiecoëfficient r wordt gegeven door $r = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$, $r' = -r$ en $tt' = 1 - r^2$. Dit geeft $I_1 = 0.020I_0$ en $I_2 = 0.019I_0$. Er is een reflectie-maximum dus de intensiteitsreflectie wordt $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 0.078 = 7.8\%$.

Opgave 6

a) Voor een interferentiemaximum geldt dat $m\lambda = a\sin(\theta)$, waarbij de tralieafstand gelijk is aan $a = 1/5000$ cm $= 2$ μm. Hieruit volgt dat voor de eerste orde de hoek gelijk is aan $\theta = 0.25$ rad $= 14.3°$.

b) Er geldt nu voor een interferentiemaximum dat $m\lambda = na\sin(\theta)$, want het gaat om de optische afstand tussen de tralielijnen, oftwel na. Hiermee krijgen we nu een hoek voor de eerste orde diffractiebundel gelijk aan $\theta = 0.19$ rad $= 10.9°$.

c) De resolutie R wordt gegeven door $R = \lambda/\Delta\lambda = 500 \times 10^{-9}/0.01 \times 10^{-9} = 5.00 \times 10^4$.

d) De resolutie van het tralie R_{tralie} wordt gegeven door $R_{tralie} = mN$, waar m de buigingsorde is en N het aantal spleten van het tralie. Om de benodigde resolutie te halen moet $R_{tralie} \geq R$. De orde voor de benodigde resolutie moet dus $m = N\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 50000/25000 = 2$ of groter zijn.

Opgave 7

a) De amplitude aan de ingang noemen we E_0. De amplitudes van de bundels 1 en 2 zijn dan $E_1 = trE_0$ en $E_2 = r'tE_0$ en dus $E_1 = -E_2$ (en $I_1 = I_2$) omdat $r = -r'$. Bij destructieve interferentie is het resulterende veld gelijk aan $E_{out} = |E_1| - |E_2| = 0$ en dus doven de bundels elkaar dan volledig uit.

NB: ook voor een meer realistische beamsplitter (met reflecties aan meer oppervlakken) geeft energiebehoud de relatie $|r| = |r'|$.

b) De intensiteit van bundel 2 noemen we $I_2 = I$. De intensiteit in bundel 1 is dus $I_1 = 0.25I$. Dit geeft voor de maximale en minimale intensiteit: $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 2.25I$ en $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0.25I$ en dit geeft een verhouding van $I_{max}/I_{min} = 9$.

c) Het licht komt zowel op de heen- als op de terugweg door het plaatje heen. Nadat het licht in bundel 1 voor de tweede keer door het plaatje is heen gegaan, zal de polarisatie van de binnenkomende bundel over een hoek van 90° t.o.v. van het licht in bundel 2 gedraaid zijn. Dan staat $E_1 \perp E_2$ en kan er geen interferentie meer optreden tussen deze twee bundels. We hebben hiervoor een kwartlambdaplaatje nodig waarvan de optische as een koek van 45° maakt met de inkomende lineaire polarisatie. Dit is als volgt in te zien:

1) het twee keer achter elkaar doorlopen van twee kwartlambda plaatjes die op dezelfde manier georiënteerd zijn is equivalent met één keer door een halflambda plaatje gaan. Een halflambdaplaatje draait de binnenkomende lineaire polarisatie over 2θ, waarbij θ de hoek is waaronder een van de assen staat met de binnenkomende polarisatie. Hier is $\theta = 45°$ en wordt de polarisatie dus over 90° gedraaid.

2) Alternatieve redenering: Na de eerste keer doorlopen van de kwartlambdaplaat is de bundel van, zeg, verticaal lineaire naar, zeg, rechtshandig circulaire polarisatie veranderd (Bij deze

keuze van de polarisaties wordt dan automatisch horizontaal lineair gepolariseerd licht omgezet in linkshandig circulair gepolariseerd en vice versa!). Door de reflectie aan spiegel M1 wordt het licht echter linkshandig circulair. Als het dan voor de tweede keer door het kwartlambdaplaatje gaat, wordt het veranderd van linkshandig circulair naar horizontaal, dus loodrecht op die van de oorspronkelijk binnenkomende bundel.

d) Een kwartlambda plaatje introduceert een optisch weglengteverschil tussen de twee hoofdpolarisaties ter grootte van $(n_o - n_e)d$. Na het doorlopen van het plaatje moet dit gelijk zijn aan $\lambda(m+1/4)$ (met m een geheel getal). Dit betekent dat de dikte minimaal $d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 16.2\,\mu$m moet zijn.