Uitwerkingen toets Optica 2004/2005

Opgave 1

We gebruiken dat lopende golven oplossingen zijn van de golfvergelijking $\frac{\partial F^2}{\partial^2 r} = \frac{\partial F^2}{\partial^2 t}\frac{1}{v^2}$. Aangezien we al weten dat de algemene oplossing hiervan voldoet aan $F(r,t) = F(r \pm vt)$ is het voldoende om te controleren of de gegeven functies deze vorm hebben.

a) $f(z,t) = ae^{-iz/b}e^{i\omega t} = ae^{-i(z/b-\omega t)} = ae^{-i/b(z-b\omega t)} = f(z - b\omega t)$ en beschrijft dus een lopende golf met voortplantingssnelheid $v = +b\omega$.

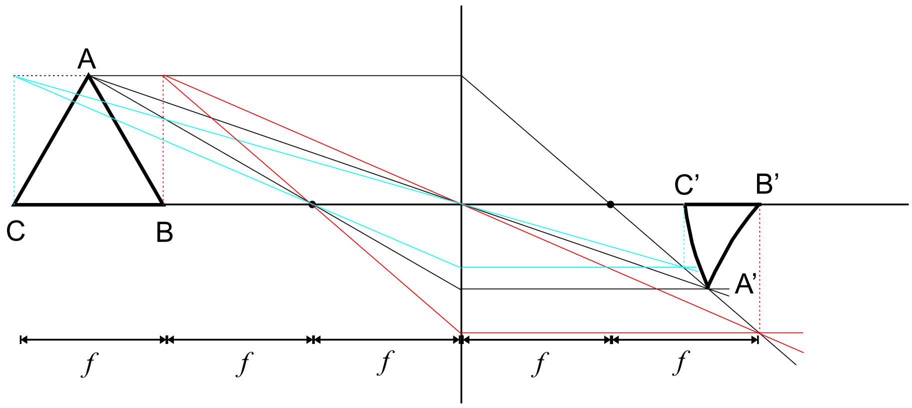
b) $g(x,t) = cte^{-(x+d)^2} = ce^{ln(t)-(x+d)^2} \neq g(x \pm vt)$ en beschrijft dus geen lopende golf.

c) $h(y,t) = p\sqrt{y^2 - 2yt + t^2}\sin(k(y-t)) = p\sqrt{(y-t)^2}\sin(k(y-t)) = p|y-t|\sin(k(y-t)) = h(y - vt)$ en beschrijft dus een lopende golf met snelheid $v = 1$.

Opgave 2

We beelden de gelijkzijdige driehoek ABC af met een lens met brandpuntsafstand f. De zijden van de driehoek hebben ook lengte f en punt B staat op afstand $2f$ van de lens.

a) De figuur toont de constructie van elk beeldpunt met behulp van de drie fundamentele stralen. Voor B en C zijn hulppunten geconstrueerd, aangegeven door de verticale stippellijnen (dit is nodig omdat ze op de as liggen).



b) We gebruiken de lenzenformule $1/f = 1/s + 1/s'$ die we schrijven als $s' = fs/(f - s)$. Invullen geeft voor B: $s = 2f \Rightarrow s' = 2f$, voor A: $s = 5/2f \Rightarrow s' = 5/3f$ en C: $s = 3f \Rightarrow s' = 3/2f$.

c) De lenzenformule is een niet-lineaire vergelijking. Dit kunnen we bijvoorbeeld zien als we hem schrijven in de vorm $s' = 1/(1/f - 1/s) = fs/(s - f)$. De afgeleide van s' naar s is niet constant, en dus is het geen lineaire vergelijking. Dit betekent dat de vergroting $M = s'/s$ van beeldpunt tot beeldpunt verschilt, en dat er dus vervormingen optreden in de richting van de optische as. In dit geval zijn de zijden van de beelddriehoek niet recht, maar lichtelijk gekromd in de richting van het brandpunt (dit is enigszins overdreven weergegeven in de figuur). Let wel, dit is dus geen aberratie in de gebruikelijk zin van het woord (namelijk de afwijking van een echte lens van de ideale dunne lens), aangezien dit ook voor dunne lenzen geldt!

Opgave 3

a) Zie $P\&P$ p. 135. Voor een ongeaccommodeerd oog moet het tussenbeeld staan in het brandvlak van het oculair.

b) De vergroting van het oculair wordt gegeven door

$$M_e = \frac{25}{f_e} = \frac{25}{5} = 5, \tag{1}$$

waarmee de totale vergroting komt op

$$M_{totaal} = M_o M_e = 20 \times 5 = 100. \tag{2}$$

c) Gegeven is dat de afstand tussen de lenzen gelijk is aan

$$22\,\mathrm{cm} = \mathrm{s}'_\mathrm{o} + \mathrm{f_e} = \mathrm{s}'_\mathrm{o} + 5, \tag{3}$$

en dus is $s'_o = 17$ cm. Verder weten we dat $M_o = s'_o/s_o = 20$. Als we dit invullen in de lenzen formule volgt:

$$\frac{1}{f_o} = \frac{1}{s'_o} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{s'_o} + \frac{20}{s'_o} = \frac{21}{s'_o} \tag{4}$$

waaruit volgt dat $f_o = 0.81$ cm.

d) Het oog ziet een virtueel beeld op 25 cm van het oog, $s'_e = -25$ cm. Als we dit invullen in de lenzen formule, samen met $f_e = 5$ cm, geeft dit $s_e = 4.17$ cm. Voor een scherpe tussenafbeelding moet de beeldafstand van het objectief $s'_o = 22 - 4.17 = 17.83$ cm zijn. Vullen we $f_o = 0.81$ cm en s'_o nu in in de lenzen formule dan geeft dit $s_o = 0.849$ cm.
De oude s_o was $s'_o/M_o = (22 - f_e)/20 = 0.850$ cm. Het voorwerp moet dus $0.849 - 0.850 = -0.001$ cm verschoven worden (naar de lens toe).

e) De waarnemer kijkt met ongeaccommodeerd oog, dus het tussenbeeld blijft in het brandpunt van het oculair staan. Dit betekent dat de afstand tussen het tussenbeeld en het objectief, s'_o, toe moet nemen. Aangezien uit de lenzenformule volgt dat dan de voorwerpsafstand s_o afneemt, wordt ook de (absolute waarde van de) vergroting $M = s'_o/s_o$ groter.

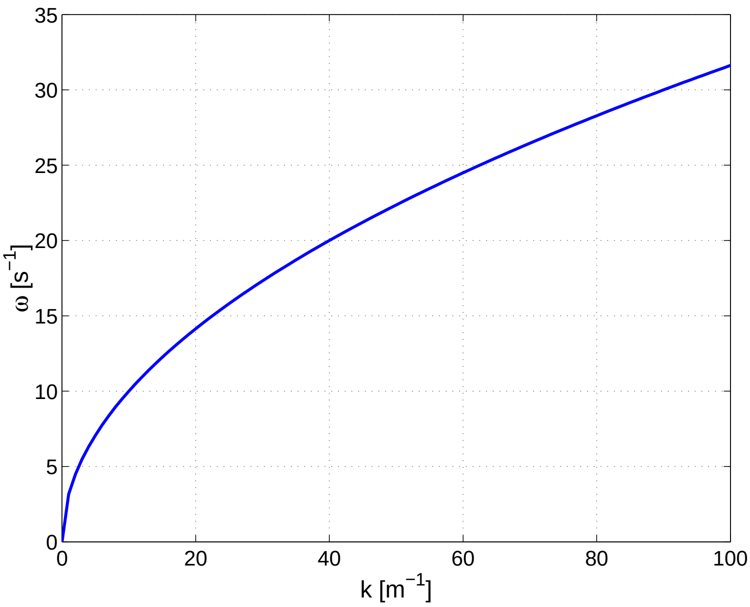
Opgave 4

a) De fase snelheid van de golf is 0.40 m/s. De relatieve bijdrage van de term met de oppervlaktespanning erin ten opzichte van de andere term is:

$$\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} / \frac{g\lambda}{2\pi} = \frac{4\pi^2\sigma}{g\rho\lambda^2} = 0.028$$

dus is deze term verwaarloosbaar.

b) We nemen $\sigma = 0$ en vullen $k = 2\pi/\lambda$ en $v_f = \omega/k$ in de formule. Dit geeft $\omega = \sqrt{gk}$.

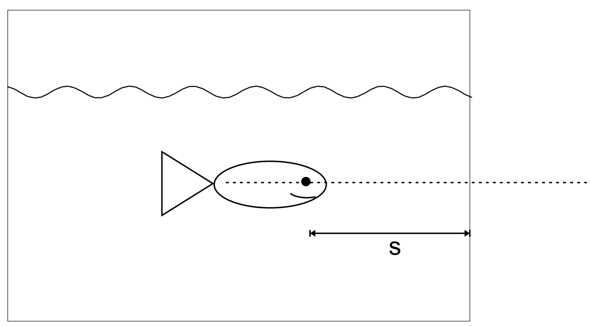


c) De fasesnelheid is $v_f = \omega/k$ en dus de verhouding van de "y"- en de "x"-coördinaat van een punt op de curve. De groepssnelheid is $v_g = d\omega/dk$ en dus de raaklijn aan de genoemde curve in een bepaald punt.

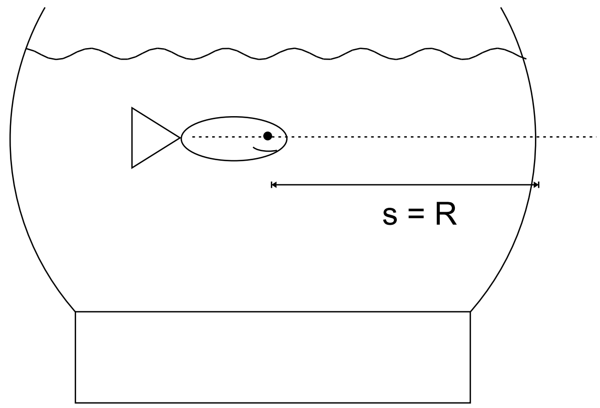
d) De groepssnelheid is $v_g = d\omega/dk = 1/2\sqrt{g/k}$ en daarmee de helft van groepssnelheid. We gaan uit van de gemiddelde golflengte van het golfpakket van 10cm. Dit geeft een groepssnelheid van $v_g = 1/2\sqrt{10 \times 0.1/2\pi} = 0.20$ m/s.

Opgave 5

a)



b)



a) We gebruiken de formule voor breking aan een enkel oppervlak:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Met hier $R = \infty$, $n_1 = 1.33$ en $n_2 = 1$ is dus $s' = -sn_2/n_1 = -s/1.33 = -0.75s$ dus de vis lijkt dichter bij de rand te zitten dan hij in werkelijkheid zit. De vergroting is $M = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = 1.33 * 0.75 = 1$.

b) We gebruiken weer

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Let op: nu geldt $R < 0$ want het centrum van de kromming ligt aan de kant waar het licht vandaan komt (oftewel het oppervlak is concaaf). Dit geeft dan

$$s' = n_2/(\frac{n_2 - n_1}{R} - n_1/s) = 1/(-0.33/(-R) - 1.33/R) = -R,$$

met andere woorden: het beeld staat ook in het centrum van de bol. De vergroting is nu $M = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = 1.33$.

c) Een negatieve beeldpuntsafstand betekent een virtueel beeld (het beeld wordt gevormd aan dezelfde kant van het brekende oppervlak als het voorwerp). Een positieve vergroting betekent een rechtopstaand beeld (zelfde oriëntatie als het voorwerp).