Uitwerkingen Hertentamen Optica

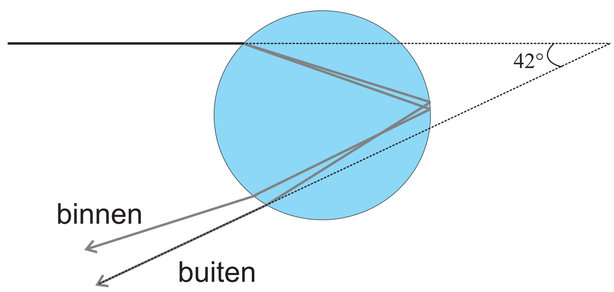
20 maart 2006

De volgende uitwerkingen zijn mogelijke manieren van oplossen, maar niet noodzakelijk de enige.

Opgave 1

a) Dispersie is het fenomeen dat een medium een golflengte afhankelijke brekingsindex heeft: $n = n(\lambda)$. Verschillende kleuren propageren met verschillende snelheden in het medium ($v = c/n(\lambda)$). Bij niet-loodrechte inval op een dispersief medium, zullen verschillende kleuren onder verschillende hoeken worden gebroken.

b) In de vraag zoals afgedrukt in het tentamen is een fout geslopen. De waarheidsgetrouwe stralengang ziet er zo uit:

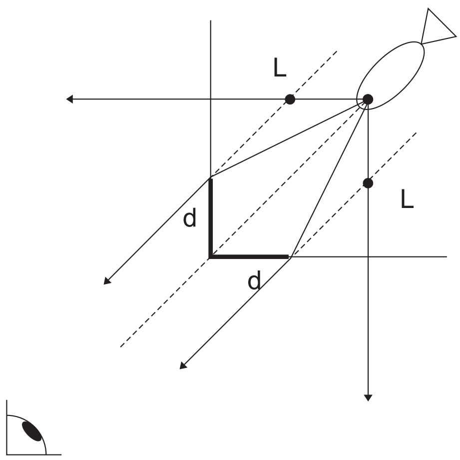


Er is gegeven dat blauw ($\lambda \simeq 450$) een grotere brekingsindex ondervindt dan rood ($\lambda \simeq 750$ nm). Blauw zal dus sterker afbuigen aan het intreefacet. Volgen we de sterker afgebogen straal, dan komt blauw dus uit bij 'binnen'. Rood zit aan de buitenkant.

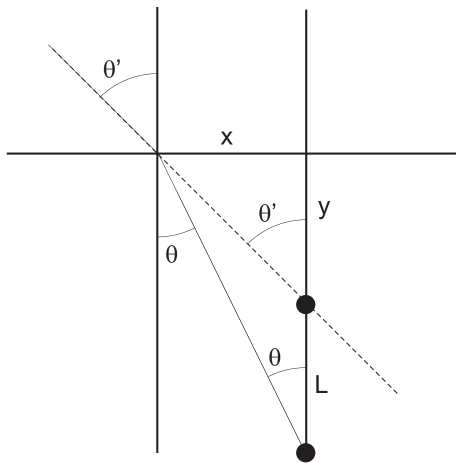
c) Een tweede regenboog ontstaat doordat een deel van het licht een tweede maal intern reflecteert voordat het de druppel verlaat.

Opgave 2

a) Zie figuur



b) *Methode 1: stralengang en Wet van Snel*



Zie de figuur. We zoeken de afstand y als functie van L. De paraxiale limiet is geldig, dus $n\theta = \theta'$ (n is de brekingsindex in de bak). Verder geldt

$$\theta' = \frac{y}{x}$$
$$\theta = \frac{L}{x}$$

Hieruit volgt dat $y\theta' = L\theta$, en wetende dat $n\theta = \theta'$ vinden we

$$y = \frac{L}{n}$$

Methode 2: Lenzenformule

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} = 0$$

Verder geldt dat $n_1 = n$, $n_2 = 1$ en $s = L$. Dit gecombineerd geeft

$$s' = -\frac{L}{n}$$

Opgave 3

a) De hoek die het licht maakt in de film is $\theta_t = 31.6°$ (wet van Snel). Het weglengteverschil tussen de reflecties van het glas-polymeer oppervlak en het lucht-polymeer oppervlak is

$$\Delta_p = 2n_f t \cos\theta_t$$

Hier is t de filmdikte. De voorwaarde voor constructieve interferentie is

$$\Delta_p + \Delta_r = m\lambda$$

Aangezien beide reflecties van een lage brekinsindex naar een hoge brekingsindex gaan, is $\Delta_r = 0$. We moeten dus de volgende vergelijking oplossen.

$$2n_f t \cos\theta_t = m\lambda$$

Als we de gegeven parameters invullen volgt hieruit dat $m\lambda = 1840$ nm. De ordes $m = 3$ en $m = 4$ vallen binnen het gedetecteerde gebied, met golflengtes $\lambda(m = 3) = 613$ nm en $\lambda(m = 4) = 460$ nm.

b) Er geldt voor twee golflengten λ_1 en λ_2 dat $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$.

$$\frac{600 \text{ nm}}{450 \text{ nm}} = \frac{4}{3}$$

Dus we zoeken een filmdikte die in de vierde orde een golflengte van 450 nm reflecteert en in de derde orde een golflentgte van 600 nm reflecteert (8/6 zou ook kunnen, ware het niet dat dit een dikkere film oplevert, in plaats van een dunnere). Dus:

$$2n_f t \cos\theta_t = 4 \cdot 450 \text{ nm}$$

Hieruit volgt dat $t = 783$ nm. De kras is dus 800 nm $-$ 783 nm $=$ 17 nm diep.

Opgave 4

a) Voor diffractie aan een circulaire apertuur kennen we:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}, \tag{1}$$

met θ de openingshoek tussen de centrale piek en het eerste diffractie minimum, λ de golflengte en D de diameter van de apertuur. Drukken we θ uit in de straal van de bundel ter plaatse van de maan r_m en de afstand tot de maan L, dan vinden we:

$$r_m = \frac{1.22\lambda L}{D}. \tag{2}$$

Dit komt uit op $r_m = 48$ m.

b) Er is gegeven dat

$$I_0 = \frac{P_0}{C\pi r_m^2}, \tag{3}$$

met $C = [2/(1.22\pi)]^2$. Het gereflecteerde vermogen vinden we door te stellen:

$$P_{refl} = A_{refl} I_0, \tag{4}$$

met $A_{refl} = \pi(d_r/2)^2$ het oppervlak van de retroreflector met diameter d_r. Wanneer we alle termen invullen, levert dit:

$$P_{refl} = \left(\frac{\pi d_r d_t}{4\lambda L}\right)^2 P_0. \tag{5}$$

c) Deze vraag is eenvoudig op te lossen als je inziet dat vgl. (5) symmetrisch is in d_r en d_t. De bron en de ontvanger spelen dus dezelfde rol. Diffractie aan de spiegel geeft daarom het dubbele effect, wat leidt tot een totaal vermogen P_{tele} na terugkeer bij de de telescoop:

$$P_{tele} = \left(\frac{\pi d_r d_t}{4\lambda L}\right)^4 P_0. \tag{6}$$

d) In de puls bevinden zich

$$N = \frac{P_0}{h\nu} = \frac{P_0\lambda}{hc} \tag{7}$$

fotonen. Met $P_0 = 1$ mJ en $\lambda = 532$ nm komt dit neer op 2.67×10^{15} fotonen. De totale fractie P_{tele}/P_0 uit vgl. (6) bedraagt 1.49×10^{-7}. Het aantal fotonen dat wordt gedetecteerd bedraagt dus 3.97×10^8.

Opgave 5

a) De intensiteiten van de vier bundels voor interferentie zijn als volgt:

A1 (2 maal transmissie): $I_{A1}/I_0 = 0.9 \times 0.9 = 0.81$

A2 (2 maal reflectie): $I_{A2}/I_0 = 0.1 \times 0.1 = 0.01$

B1 (1 maal transmissie, 1 maal reflectie): $I_{B1}/I_0 = 0.9 \times 0.1 = 0.09$

B2 (1 maal reflectie, 1 maal transmissie): $I_{B2}/I_0 = 0.1 \times 0.9 = 0.09$

b) We gebruiken voor de totale intensiteit na interferentie de formule:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi). \tag{8}$$

Bij uitgang A treedt interferentie op tussen bundels met intensiteiten $I_{A1} = 0.81 I_0$ en $I_{A2} = 0.01 I_0$. Invullen geeft $I_{max} = 1.0 I_0$ en $I_{min} = 0.64 I_0$, met een fringe visibility $V = 0.22$.

Bij uitgang B treedt interferentie op tussen bundels met intensiteiten $I_{B1} = I_{B2} = 0.09 I_0$. Invullen geeft $I_{max} = 0.36 I_0$ en $I_{min} = 0$, met een fringe visibility $V = 1.00$.

c) De periodiciteit en fase van de interferentie worden bepaald door het faseverschil tussen de twee interfererende lichtpaden. In de analyse houden we rekening met drie bijdragen aan het faseverschil: (*i*) Een constante fase ϕ_0, die te maken heeft met de vaste padlengten (zoals y_0); (*ii*) een veranderende fase $\phi_{\Delta y} = 2\pi(2\Delta y/\lambda)$, die te maken heeft met de extra vertraging bij verplaatsing van de translatietafel; en (*iii*) mogelijke extra fases van π bij reflectie aan het grensvlak tussen een medium met lage brekingsindex naar hoge brekingsindex (bundelsplitser).

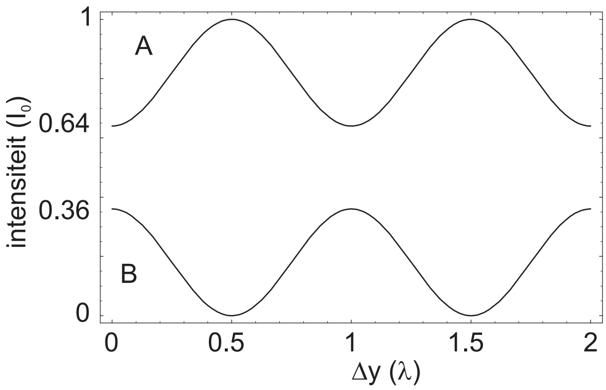
Het faseverschil voor de interfererende bundels in kanaal A wordt hiermee:

$$\Delta\phi_A = \phi_{A2} - \phi_{A1} = \phi_0 + 2\pi(2\Delta y/\lambda) + \pi. \tag{9}$$

Het faseverschil voor de interfererende bundels in kanaal B wordt hiermee:

$$\Delta\phi_B = \phi_{B2} - \phi_{B1} = \phi_0 + 2\pi(2\Delta y/\lambda) + \pi - \pi. \tag{10}$$

De intensiteit na interferentie wordt bepaald door de $\cos(\Delta\phi)$ in vgl. (8). Deze is periodiek in $\Delta y = \lambda/2$ (het licht gaat *heen* en *weer* in de translatietafel). De interferenties in kanaal A en B zijn uit fase, omdat $\phi_A - \phi_B = \pi$. Merk op dat de som van de intensiteiten constant is (vanwege energiebehoud): $I_A + I_B = I_0$.



Opgave 6

a) Om maximale transmissie door de tweede polarisator te kijgen, moet het dubbelbrekende plaatje de polarisatie 90° draaien. Dit is een $\lambda/2$-plaatje, waarvoor we weten:

$$\frac{\Delta n d}{\lambda} = m + \frac{1}{2}, \tag{11}$$

met λ de golflengte, d de dikte van het plaatje en Δn het brekingsindexverschil tussen zijn twee assen. Zoals gegeven gaat deze voorwaarde bij $\lambda_2 = 650$ nm op, en vervolgens wederom bij $\lambda_1 = 750$ nm. Er volgt:

$$\frac{\Delta n d}{\lambda_1} = m + \frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\frac{\Delta n d}{\lambda_2} = m' + \frac{1}{2} = m + \frac{3}{2}. \tag{13}$$

Dit zijn twee vergelijkingen met twee onbekenden. We vinden voor het orde getal:

$$(m + \frac{1}{2})\lambda_1 = (m + \frac{3}{2})\lambda_2, \tag{14}$$

ofwel $m = 6$. Vervolgens vinden we $d = 0.542$ mm.

b) De volgende maximaal doorgelaten golflengtes in de rij, bij $\Delta n d/\lambda = 8\frac{1}{2}$ en $\Delta n d/\lambda = 9\frac{1}{2}$, zijn $\lambda_3 = 573.5$ nm en $\lambda_4 = 513.1$ nm. De golflengtes in het spectrum met minimale intensiteit ($I = 0$) vinden we door te eisen:

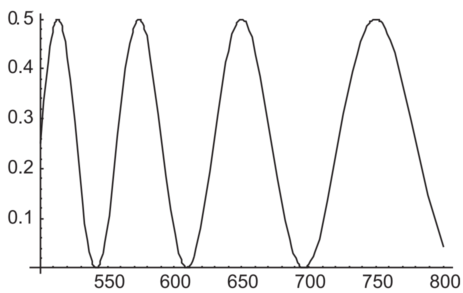
$$\frac{\Delta n d}{\lambda} = m. \tag{15}$$

Deze nulpunten liggen achtereenvolgens bij 696.4 nm en 609.4 nm.

De transmissie T door de tweede polarisator is

$$T = \frac{I_0}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{\Delta n d}{\lambda}\right)\right] = \frac{I_0}{2}\sin^2\left(\pi\frac{\Delta n d}{\lambda}\right), \tag{16}$$

met $2\pi\Delta n d/\lambda$ het totale faseverschil. De factor $I_0/2$ ontstaat doordat de eerste polarisator de helft van de intensiteit I_0 weggooit. Het argument is omgekeerd evenredig met de golflengte. Dit ziet er als volgt uit:



De maximale amplitude (bij $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) bedraagt $I_0/2$.

c) Als het λ-plaatje onder 90° gedraaid wordt, reist de volledige intensiteit over een van beide kristalassen. Het plaatje functioneert dan als een gewoon stuk glas, en de polarisatie zoals aangebracht door polarisator 1 blijft onveranderd. Er komt dus niets door de tweede polarisator.