

# Uitwerkingen Tentamen Optica

22 februari 2006

De volgende uitwerkingen zijn mogelijke manieren van oplossen, maar niet noodzakelijk de enige.

## Opgave 1

a) Voor geluidsgolven geldt net als voor lichtgolven  $n_m = v_{lucht}/v_{materiaal}$ , als we  $n_{lucht} = 1$  als referentie kiezen. De ballon werkt als een geluidslens met brekingsindex  $n_m$ . Voor Helium geldt dat  $n_m < 1$ , waardoor we een negatieve lens krijgen en het geluid na de ballon divergeert. Met CO2 is de lens positief ( $n_m = 343 \text{ m s}^{-1}/259 \text{ m s}^{-1} = 1.32$ ) en convergeert het geluid (als  $s > f$ ). CO2 is dus het juiste gas om de ballon mee te vullen.

b)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{s} \quad (s = s') \quad (1)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n_m - n_l}{n_l} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_m - n_l}{n_l} \left( \frac{2}{R} \right) = \frac{2}{s} \quad (2)$$

$$s = \frac{n_l}{n_m - n_l} R = \frac{R}{n_m - 1} = \frac{1.5 \text{ m}}{0.32} = 4.69 \text{ m}$$

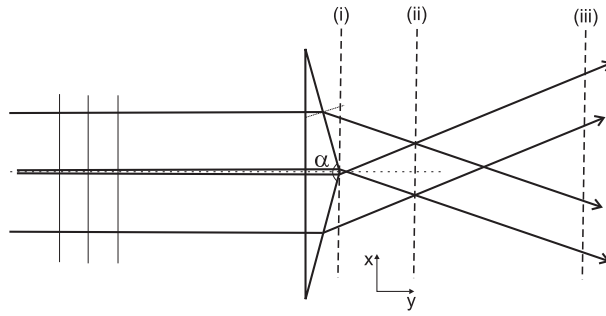
c) De grootte van het focus is onderhevig aan diffractie. In het vlak van de "geluidsafbeelding" geldt

$$d = s \frac{1.22\lambda}{D} \quad (3)$$

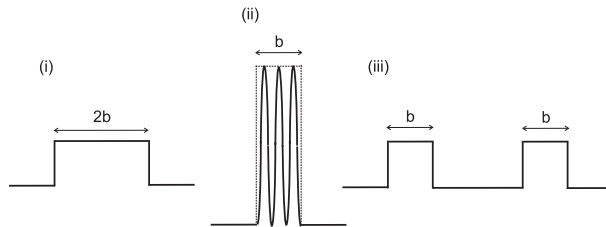
Waarbij  $d$  de straal van het focus is en  $D$  de diameter van de lens. Hoe kleiner de golflengte (dus hoe hoger de toon), hoe kleiner het focus dus hoe hoger de geluidsintensiteit. De lens werkt dus beter voor hoge tonen.

## Opgave 2

a) Het Fresnel biprisma knipt de vlakke golf in twee bundels die elkaar kruisen. De stralengang ziet er als volgt uit:



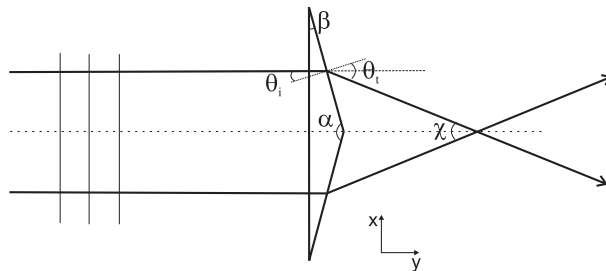
- b) Vlak achter het prisma, op positie (i), is het intensiteitsprofiel homogeen en heeft het breedte  $2b$ . In vlak (ii) overlappen de twee bundels geheel en treedt maximale interferentie op. De breedte is daar  $b$  en de piek intensiteit bedraagt 4 maal die op positie (i). Ver weg, in vlak (iii), zijn de twee golven elkaar gepasseerd en zien we twee losse bundels, van breedte  $b$ .



- c) Om deze vraag op te lossen gebruiken we de wet van Snellius:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t. \quad (4)$$

Aangezien  $\theta_i \ll 1$ , mag deze vergelijking ook paraxiaal genomen worden:  $n_i \theta_i = n_t \theta_t$ .



Uit de geometrie van het probleem volgt  $\theta_i = \beta$ . Voor deze driehoek weten we eveneens dat  $2\beta + \alpha = \pi$ , zodat:

$$\theta_i = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Rechts in de figuur vormt zich een Z-hoek, en we concluderen:

$$\chi = 2(\theta_t - \beta). \quad (5)$$

Met  $\alpha = 179^\circ$  en  $n = 1.5$ , volgt uiteindelijk dat  $\chi = 0.5^\circ$ .

d) De lengte van de golfvector  $\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y$  is gegeven door  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . De golfvectoren van bundel 1 en 2 ontbinden we als volgt langs ons assenstelsel  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned} k_{1,x} &= k \sin \frac{\chi}{2} \\ k_{2,x} &= -k \sin \frac{\chi}{2} \\ k_{1,y} &= k_{2,y} = k \cos \frac{\chi}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

Dit geeft ons voor de velden:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 e^{i(k \sin \frac{\chi}{2} x + k \cos \frac{\chi}{2} y - \omega t)} \\ E_2 &= E_0 e^{i(-k \sin \frac{\chi}{2} x + k \cos \frac{\chi}{2} y - \omega t)} \end{aligned} \quad (7)$$

We zoeken de minima in het interferentiepatroon, alwaar de som van de twee golven  $E_1 + E_2 = 0$  gelijk is aan nul:

$$e^{i(k \cos \frac{\chi}{2} y - \omega t)} \left( e^{ikx \sin \frac{\chi}{2}} + e^{-ikx \sin \frac{\chi}{2}} \right) = 0 \quad (8)$$

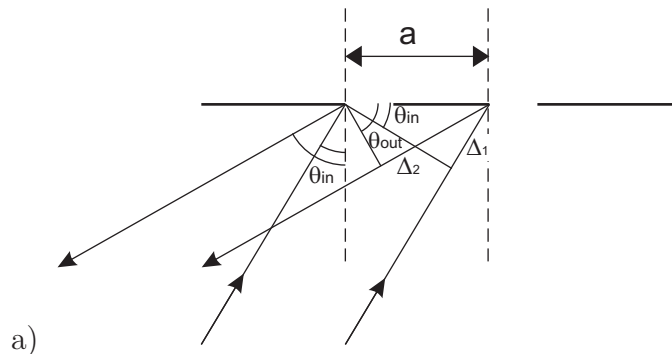
We vinden in de  $y$ -richting een lopende golf en in de  $x$ -richting een staand golfpatroon. Knopen ontstaan dus alleen in de  $x$ -richting. De afstand tussen de knopen vinden we als volgt:

$$\begin{aligned} e^{ik \sin \frac{\chi}{2} x} + e^{-ik \sin \frac{\chi}{2} x} &= 2 \cos(k \sin \frac{\chi}{2} x) = 0 \\ k \sin \frac{\chi}{2} x &= \frac{\pi}{2} + m\pi \\ k \sin \frac{\chi}{2} \Delta x &= \pi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\chi}{2}} \left( \simeq \frac{\lambda}{\chi} \right) \quad (10)$$

Als we de relevante gegevens invullen, vinden we dat het interferentie patroon zeer fijn is - de minima liggen slechts  $\Delta x = 72,5 \mu\text{m}$  uit elkaar.

### Opgave 3



Zie de figuur. Het totale weglengteverschil tussen de twee getekende stralen is  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , en voor de maxima geldt  $\Delta = m\lambda$ .

Dit geeft

$$\Delta_1 + \Delta_2 = a \sin \theta_{in} + a \sin \theta_{out} = m\lambda \quad (11)$$

b) Als  $\theta_{in} \approx \theta_{out} \approx \theta$ , dan geldt  $2a \sin \theta = m\lambda$ , waarbij  $a = 1/10000 \text{ cm}^{-1} = 1 \mu\text{m}$ . Invullen met  $m = 1$  geeft  $\theta = 17.2^\circ$ .

c)

$$(d\lambda/d\theta_{out})^{-1} = \frac{m}{a \cos \theta_{out}} \quad (12)$$

Voor  $m = 1$  geeft dit een hoekdispersie van  $1.05 \cdot 10^{-3} \text{ rad/nm}$ .

d) Voor de diffractielimiet geldt

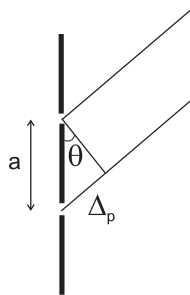
$$\phi = \frac{\lambda}{b} \quad (13)$$

Met  $\phi$  de openingshoek van de bundel bij de spleet en  $b$  de spleetbreedte. De optimale hoekopening wordt bereikt als het tralie volledig wordt belicht, ofwel als de bundel op de eerste gekromde spiegel net zo breed is als het tralie ( $\simeq 25 \text{ mm}$ , ondanks het gedeeltelijke zijaanzicht, want  $\cos(17.2^\circ) \simeq 1$ ). De afstand van de spiegel naar de spleet is  $f_{spiegel} = R/2 = 250 \text{ mm}$ , dus  $\phi = l_{tralie}/f_{spiegel} = 0.1 \text{ rad}$ . De minimale spleetbreedte  $b$  bij een golflengte van  $590 \text{ nm}$ , is dus gelijk aan  $5.9 \mu\text{m}$ .

#### Opgave 4

a) Het weglengte verschil  $\Delta_p$  valt uit de figuur te halen:

$$\Delta_p = a \sin \theta. \quad (14)$$



Hoek  $\theta$  kan paraxiaal genomen worden:  $\sin \theta = \theta$ . Voor  $\Delta_p = m\lambda$  kijken we naar maxima en de periode tussen tussen orde  $m$  en  $m + 1$  bedraagt dus:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (15)$$

(In (Pedrotti)<sup>3</sup> wordt interferentie van een dubbelspleet beschreven met een  $\cos^2 \alpha$  term, wat analoog is aan de uitdrukking in de opgave. Het argument  $\alpha$  is gelijk aan  $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \theta$ . Stellen we deze  $\cos^2 \alpha$  gelijk aan 1, wat correspondeert met de maxima, dan volgt dezelfde uitdrukking.)

Een maximum van orde  $m$  bij hoek  $\theta_m$  correspondeert met positie  $x = f \tan \theta = f\theta$  op het scherm. We vinden voor de periode op het scherm:

$$\Lambda = \Delta x = f \Delta \theta = \frac{f \lambda}{a}. \quad (16)$$

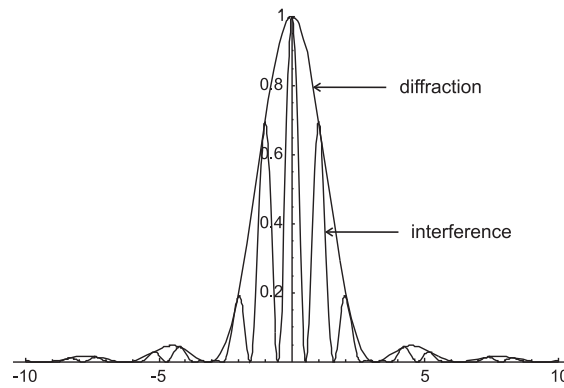
b) Allereerst merken we op dat de periodiciteit van het patroon niet wijzigt.

Wanneer de apertuur  $s$  een eindige grootte heeft - dat wil zeggen  $s$  is significant - zal de bron zijn ruimtelijke coherentie verliezen. Als gevolg daarvan zal het interferentie patroon vervagen - de modulatie zal inzakken. Het interferentiepatroon verdwijnt volledig wanneer  $s$  zo groot is dat twee stralen vanuit verschillende punten in de apertuur tot aan hetzelfde punt op de dubbelspleet een weglengte verschil van  $\Delta = \lambda/2$  hebben. Dit weglengte verschil kan ook geschreven worden als  $\Delta = a\theta$ , met  $\theta = s/r$ . Voor grafische verheldering, zie figuur 9.13 uit (Pedrotti)<sup>3</sup>. Ruimtelijke coherentie van de bron is verzekerd als:

$$s < \frac{r \lambda}{a} \quad (17)$$

c) Ten gevolge van de eindige spleetbreedtes  $b$  zal het licht diffractie ondergaan. Diffractie is typisch van de vorm  $\sin \beta / \beta$ , waarbij  $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta \simeq \frac{1}{2}kb\theta$ . Deze term vermenigvuldigt met de reeds aanwezige interferentie term tot:

$$I \propto \cos^2 \alpha \times \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}. \quad (18)$$



d) Door de verschillende spleetbreedtes ( $b_1 = 2b_2$ ) zijn de intensiteiten niet gelijk. Dit doet echter niets af aan de periodiciteit van het interferentiepatroon - die is ongewijzigd. De modulatie diepte verandert wel. Aangezien  $E_1 = 2E_2$  volgt:

$$I \propto |E_1 + E_2|^2 = I_1(1 \pm 2)^2 = I_1(5 \pm 4) \quad (19)$$

## Opgave 5

a)

$$\begin{aligned}r' &= -r \\ tt' &= 1 - r^2\end{aligned}\tag{20}$$

Dit geeft  $r' = +0.280$  en  $tt' = 0.922$

b)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= r \\ \rho_2 &= r' tt' \\ \rho_3 &= r'^3 tt'\end{aligned}$$

Dit geeft  $\rho_1 = -0.280$ ,  $\rho_2 = +0.2580$  en  $\rho_3 = +0.0202$

c)

$$I_{r,i} = \rho_i^2 I_0$$

Dit geeft  $I_{r,1} = 7.84 \cdot 10^{-2} I_0$ ,  $I_{r,2} = 6.66 \cdot 10^{-2} I_0$  en  $I_{r,3} = 4.08 \cdot 10^{-4} I_0$

d) Als de tweede en derde bundel elkaar versterken doven ze de eerste bundel uit, omdat de tweede en derde bundel een faseverschil door reflectie van  $180^\circ$  hebben ten opzichte van de eerste bundel ( $r = -r'$ ). Voor de tweede en derde gereflecteerde bundel geldt voor een "bright fringe":

$$\begin{aligned}\Delta_p + \Delta_r &= m\lambda \\ \Delta_r = 0 &\Rightarrow 2nd \cos \theta = m\lambda\end{aligned}\tag{21}$$

Hierbij is  $\Delta_p$  het faseverschil door het verschil in optische weglengte,  $\Delta_r$  het faseverschil door reflectie,  $n$  de brekingsindex van de film,  $d$  de gevraagde filmdikte en  $\theta$  de hoek met het oppervlak die het licht maakt *in de film*. Deze hoek  $\theta$  is  $30^\circ$ .

Hieruit volgt dat  $d = 258$  nm.

## Opgave 6

a) Om tot het antwoord te komen is het nodig om de *optische padweglengte* van de trajecten te bepalen. Het dubbelbrekend materiaal heeft twee assen, met ieder een eigen brekingsindex. Licht reizend over de ordinaire as legt een optische padweglengte  $n_o d$  af, met  $d$  de dikte. Licht dat zich over de extraordinaire as voorbeweegt, legt zo  $n_e d$  af.

Het verschil tussen beide paden, uitgedrukt in aantal golflengtes, is dus:

$$\frac{(n_e - n_o)d}{\lambda}. \quad (22)$$

Dit geeft voor de gegeven getallen 42.75. Licht dat over de gewone as gaat ligt na het kristal een kwart golflengte uit fase met licht dat over de buitengewone ging. Dit is een  $\lambda/4$ -plaatje.

- b) Het  $\lambda/4$ -plaatje draait de verticale polarisatie op de heenweg naar de eindspiegel naar circulair. Op de terugweg trekt het plaatje het licht dat over de langzame as gaat echter nog een keer  $\pi/2$  verder uit fase. Dit draait de circulaire polarisatie naar lineair horizontaal. Licht in pad 2 is onveranderd verticaal gepolariseerd.

Loodrechte polarisaties interfereren niet met elkaar, de twee bundels vallen op het scherm over elkaar heen zonder elkaar te beïnvloeden! Er is dus geen modulatie te zien op het scherm en er volgt  $I_{max} = I_{min} \Rightarrow I_{max}/I_{min} = 1$ .

- c) De polarisator elimineert de polarisatie component die loodrecht op de transmissie as staat. De intensiteit neemt af tot:

$$I'_2 \propto |E'_2|^2 = |E_2 \cos \theta|^2, \quad (23)$$

waarbij  $E_2$  en  $E'_2$  het inkomende en het doorgelaten veld zijn in pad 2. Met  $\theta = 45^\circ$  levert dit  $I'_2 = \frac{1}{2}I_2$ . De polarisator laat de intensiteit en polarisatie bij de tweede doorgang (op de terugweg naar de bundelsplitser) onveranderd.

We kunnen  $E'_2$  ontbinden in het  $(x, y)$  stelsel:

$$E'_2 \propto \sqrt{I'_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De polarisatie in pad 1 is nog altijd horizontaal:

$$E_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interferentie op het scherm geeft een intensiteitsmodulatie:

$$I \propto |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 \pm 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \quad (24)$$

Met  $|\vec{E}_1|^2 = 1$ ,  $|\vec{E}_2|^2 = \frac{1}{2}$  en  $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2}$ , levert dit:

$$I \propto \frac{3}{2} \pm 1, \quad \frac{I_{min}}{I_{max}} = 20\%.$$