Uitwerkingen Toets Optica

11 december 2006

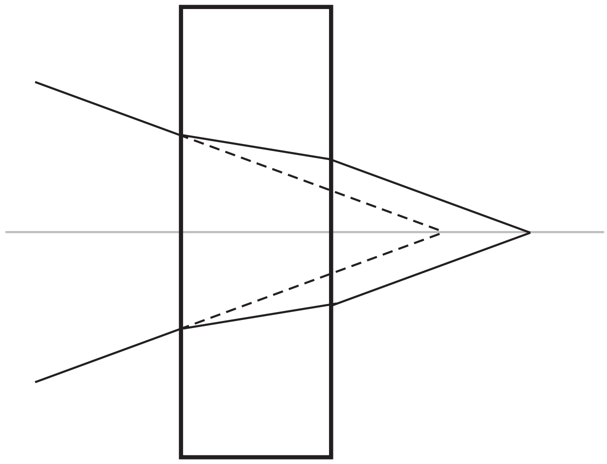
Zet je naam, studentennummer en studierichting bovenaan elk vel dat je gebruikt. Lees de 5 opgaven eerst eens door.

Opgave 1

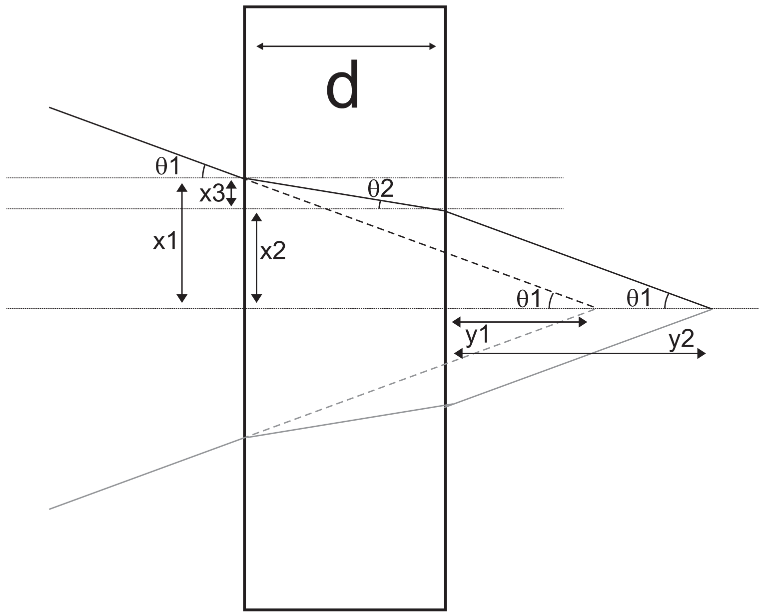
a) Zie de doorgetrokken lijn in de figuur.
(Wet van Snellius (paraxiaal): $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$

$n_1 = 1$ en $n_2 = n$, dus $\theta_2 = \theta_1/n < \theta_1$

Breking naar de normaal toe dus het focus schuift naar achter.)



b) Methode 1: Alle hoeken paraxiaal ($\sin\theta \simeq \theta$).



$$\begin{aligned} x_1 &= (d + y_1)\theta_1 \\ x_3 &= d\theta_2 \\ x_2 &= x_1 - x_3 = (d + y_1)\theta_1 - d\theta_2 \end{aligned}$$

en $x_2 = y_2\theta_1$, dus

$$d\theta_1 + y_1\theta_1 - d\theta_2 = y_2\theta_1$$

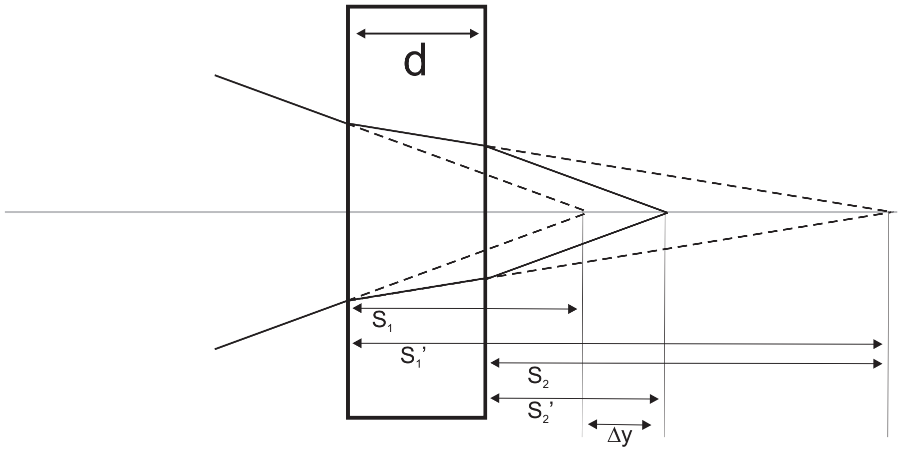
gevraagd is $\Delta y = y_2 - y_1$

$$y_2 - y_1 = \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1}$$

$\theta_1 = n\theta_2$, dus

$$\Delta y = d\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Methode 2: lenswerking aan twee vlakke oppervlakken.



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R} = 0$$

Oppervlak 1:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_1'} = 0 \Rightarrow s_1' = -ns_1$$

Oppervlak 2:

$$\frac{n}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = 0$$

$$s_2 = -(s_1' - d)$$
$$s_2' = -\frac{s_2}{n} = -\left(s_1 + \frac{d}{n}\right)$$

$\Delta y = s_2' + d + s_1$ (let op tekens: voorwerp s_1 bevindt zich rechts van de lens en is dus negatief)

$$\Delta y = -s_1 - \frac{d}{n} + d + s_1 = d\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Opgave 2

a) De vergroting is evenvoudig te vinden door de twee focale afstanden op elkaar te delen:

$$M = -\frac{f_{obj}}{f_{ocu}}. \tag{1}$$

Het minteken slaat op een gespiegeld beeld. Met $|M| = 100\times$ en $f_{ocu} = 10$ mm, vinden we $f_{obj} = 1$ m. Voor een holle spiegel geldt dat $f = -R/2$, zodat we uiteindelijk voor de kromtestraal vinden $R = -2$ m (hol).

b) Voor deze vraag gebruiken we de lenzenformule:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}, \tag{2}$$

met $f = f_{obj}$. Voor normaal gebruik, waarbij je de sterren bekijkt, stellen we $s \to \infty$. Er volgt $s' = f = 100$ cm. In het dubieuze geval dat je de buurvrouw voyeert, vullen we in $s = 20$ m. Er volgt $s' = 105,3$ cm. Om ongeaccommodeerd te kunnen blijven kijken, moet het oculair dus 5,3 cm verschuiven, en wel naar buiten toe (de afstand tussen objectief en oculair wordt groter).

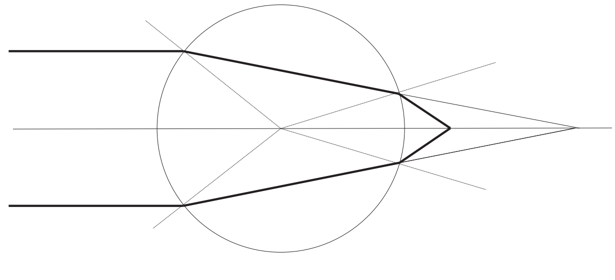
Opgave 3

a) De maximale tolerantie om buiten de bol te focuseren, vind je wanneer evenwijdige stralen die aan het eerste grensvlak breken, exact op het tweede grensvlak elkaar kruisen. We gebruiken:

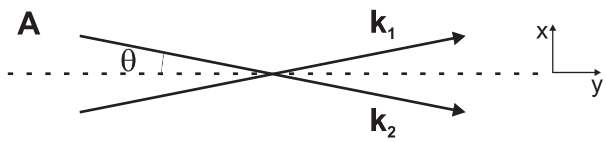
$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \tag{3}$$

De term $\frac{n_1}{s}$ verdwijnt, aangezien de stralen uit oneindig komen. Voor het extreme geval vullen we in $s' = 2R$. Er volgt $\frac{n}{2R} = \frac{n-1}{R}$ en dus $n = 2$. Kortom, we focuseren buiten de bol voor $n < 2$.

b) De gevraagde schets ziet er ongeveer zo uit (met hulplijnen vanuit het centrum van de bol).



Opgave 4



a)

$$k_{1,x} = k \sin\theta$$
$$k_{2,x} = -k \sin\theta$$

$$k_{1,y} = k_{2,y} = k\cos\theta$$

Golfvergelijkingen:

$$E_1 = E_0 e^{i(k\sin\theta\, x + k\cos\theta\, y - \omega t)}$$
$$E_2 = E_0 e^{i(-k\sin\theta\, x + k\cos\theta\, y - \omega t)}$$

We zoeken de vlakken waar het totale veld nul is, dus $E_1 + E_2 = 0$

$$E_1 + E_2 = E_0\, e^{i(k\cos\theta\, y - \omega t)} \left(e^{ik\,x\sin\theta} + e^{-ik\,x\sin\theta}\right)$$

We vinden in de y-richting een lopende golf en in de x-richting een staand golfpartoon. We zullen dus alleen knopen in de x-richting vinden. De afstand tussen de knopen vinden we als volgt:

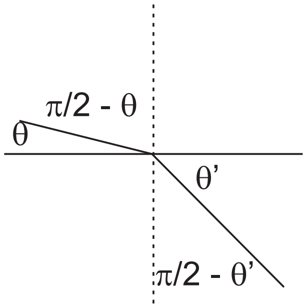
$$e^{ik\sin\theta\, x} + e^{-ik\sin\theta\, x} = 2\cos(k\sin\theta\, x) = 0$$

$$k\sin\theta\, x = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$k\sin\theta\,\Delta x = \pi$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

b) In het medium is de hoek tussen de k-vectoren en het oppervlak θ'.



Uit de wet van Snellius volgt dat

$$\sin(\pi/2-\theta) = n\sin(\pi/2-\theta')$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = n\cos(\theta')$$

In de paraxiale benardering geldt $\cos\theta \approx 1$, dus

$$\theta' = \arccos(1/n)$$

Verder geldt in een medium dat $\lambda' = \lambda/n$, dus

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\sin\theta'}$$

$$\sin\theta' = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Dus

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\sqrt{1-1/n^2}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-1}}$$

Δx is nu onafhankelijk van θ , mits deze klein is.

Opgave 5
Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen.

a) De oscillatie (periodieke structuur) binnen het golfpakket plant zich voort met de fasesnelheid. Het omhullende (intensiteits)patroon plant zich voort met de groepssnelheid.

b)

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{groep} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$