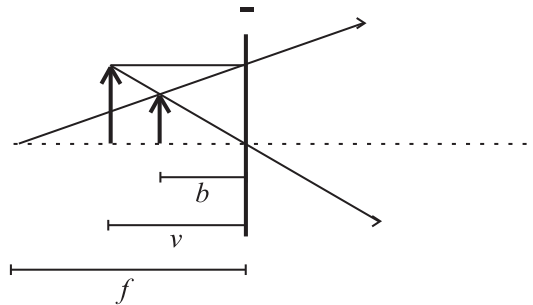


Uitwerkingen Hertentamen Optica

18 maart 2008

Opgave 1

- a) De vergroting is gegeven door $M = b/v$ (zie figuur). Invullen van de lenzen formule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ met $v = 3$ cm en $b = -2$ cm (virtueel dus negatief) leert dat $f = -\frac{1}{6}$ cm. Oftewel, de lens heeft een sterkte van -17 dioptrie.



Opgave 2

- a) De brandpuntsafstand van de lens is te bepalen met behulp van de Lenzenmakers formule:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

Invullen van $n_1 = 1$, $n_2 = 1,5$ en $R_1 = -R_2 = 1$ m levert: $f = 1$ m.

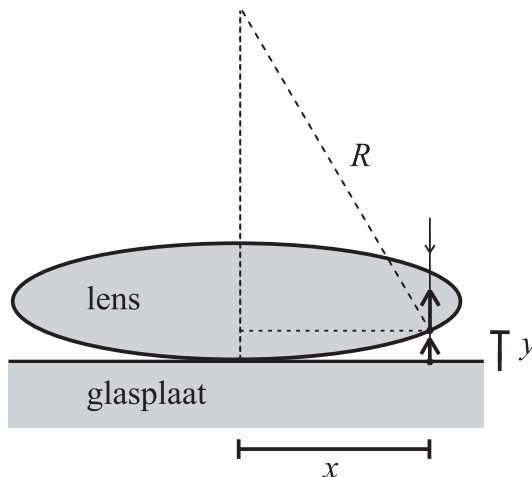
- b) Dichtbij het contactpunt is de afstand tussen lens en glasplaat zeer klein. Er is daarom (nauwelijks) padweglengteverschil tussen de twee paden. Echter, de reflectie aan de lens pikt geen fase sprong π op, maar de reflectie aan de glasplaat wel. De twee bundels interfereren daardoor destructief. N.B. Het eenvoudige antwoord dat er helemaal geen reflectie is als twee glazen objecten optisch contact met elkaar maken is ook goed gerekend.
- c) Het weglengteverschil, $2y$, is te schrijven als $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ (zie figuur), wat met behulp van de Taylorexpanctie $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$ te benaderen is als

$$y \simeq \frac{x^2}{2R}. \quad (2)$$

Zoals eerder vermeld hebben de bundels een faseverschil π door reflectie. Donkere ringen, d.w.z. destructieve interferentie, treedt dus op als $2y = m\lambda$. Er volgt

$$x = \sqrt{m\lambda R}. \quad (3)$$

De doorsnede van de ringen wordt kwadratisch kleiner. Voor de eerste twee donkere ringen volgt $x_{m=1} = 0,71$ mm en $x_{m=2} = 1,00$ mm.



Opgave 3

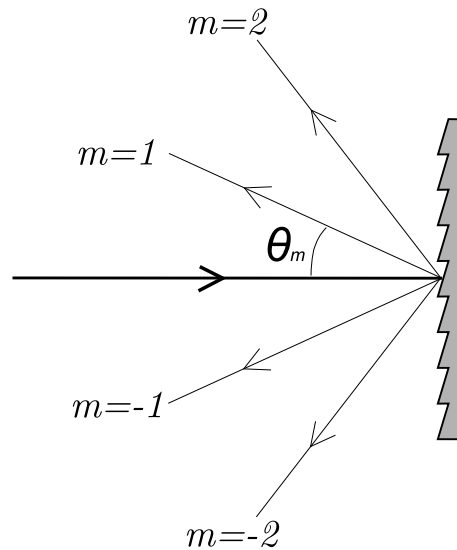
- Het is voldoende om te laten zien dat pad I en pad II evenveel intensiteit bijdragen aan de uitgang: $I_I = I_{II}$. De bijdrage van pad I is te schrijven als $I_I = RT = R(1 - R)$, terwijl voor pad II geldt $I_{II} = TR = (1 - R)R$. Dus, inderdaad, $I_I = I_{II}$.
- Er verandert niets met de zichtbaarheid van de interferentie. Het verticaal gepolariseerde licht reist volledig over de snelle as van het $\lambda/4$ -plaatje, de langzame as blijft buiten spel. Er treedt dus geen polarisatie draaiing op en de interferentie is volledig.
- Door het $\lambda/4$ -plaatje in een van de paden, zeg pad I , draait de polarisatie van lineair naar circulair: $E_I \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; terwijl voor pad II onveranderd geldt: $E_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De intensiteit in de uitgang varieert tussen $|E_I - E_{II}|^2 < I_{tot} < |E_I + E_{II}|^2$, en dus $2 - \sqrt{2} < I_{tot} < 2 + \sqrt{2}$.

Opgave 4

- De verschillende hoeken waaronder het licht van het tralie afkomt zijn schematisch (dus niet waarheidsgetrouw) weergegeven in de onderstaande figuur. De hoeken waarbij het terugkomende licht constructief interfereert voldoen aan

$$\sin \theta_m = \frac{m\lambda}{a}, \quad (4)$$

waarbij λ de golflengte is, m het nummer van de interferentie orde is en a de lijnafstand is. De hoek van de eerste interferentieorde ($m = 1$) bij $\lambda_1 = 588,99$ nm en $a = (1/600)$ cm is $\sin^{-1}(\lambda/a) = 2,0252^\circ$. De hoek van de eerste interferentieorde bij een golflengte van $\lambda_1 = 589,59$ nm is $2,0273^\circ$.



b) De *resolving power* van een tralie is

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = Nm, \quad (5)$$

waarbij N het aantal belichte lijnen is, m het orde nummer en $\Delta\lambda_{\min}$ het minimaal onderscheidbare golflengteverschil (volgens het Rayleigh criterium). Bij een bundelbreedte van 1 cm worden er $N = 600$ lijnen belicht. Uit bovenstaande vergelijking vinden we $\Delta\lambda_{\min} = 0,98$ nm. Het golflengte verschil dat we zoeken is 0,60 nm wat dus te klein is om waar te nemen in de eerste diffractie orde. Je kunt dit resultaat ook vinden door gebruik te maken van de diffractiehoek $\Delta\theta_{\min} = \lambda/(D \cos \theta)$, waarbij $D \cos \theta$ de geprojecteerde bundelbreedte is.

c) Het minimaal onderscheidbare golflengteverschil $\Delta\lambda_{\min}$ moet kleiner zijn dan het te meten golflengteverschil. Dit komt overeen met

$$\frac{\lambda}{mN} \leq 0,60 \text{ nm}, \quad (6)$$

ofwel $m \geq 1,63$. De twee spectraallijnen zijn dus al in de tweede diffractie orde te onderscheiden.

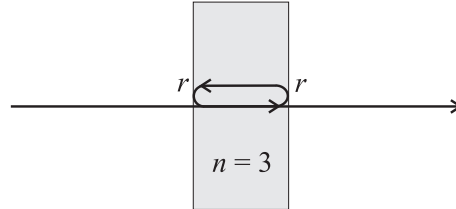
Opgave 5

a) Bij iedere rondgang reflecteert licht twee maal - aan de voor- en achterzijde van de plaat - zodat intensiteit vermindert met $r^2 = R$ (zie figuur). Ten tweede loopt het licht bij iedere rondgang

een een faseverschil $\phi = 2\pi \frac{2nd}{\lambda}$ op. Zo kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
 0^e \text{ rondgang} &\rightarrow E_{t,0} \propto 1 \\
 1^e \text{ rondgang} &\rightarrow E_{t,0} \propto Re^{i\phi} \\
 2^e \text{ rondgang} &\rightarrow E_{t,0} \propto R^2 e^{2i\phi} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

De totale transmissie E_t is de som van al deze bijdragen.



b) Allereerst merken we op dat $(1 - Re^{i\phi})(1 + Re^{i\phi} + R^2 e^{2i\phi} + \dots) = 1 - \mathcal{O}(R^{N+1}) \rightarrow 1$, zodat

$$E_t = \sum_n (Re^{i\phi})^n = \frac{1}{1 - Re^{i\phi}}. \tag{8}$$

Maximale transmissie treedt op wanneer licht resonant is - d.w.z. de golflengte past een geheel aantal keer in de resonator, en dus $\phi \bmod 2\pi = 0$. Minimale transmissie treedt juist op wanneer licht na de n -de rondgang π uit fase is met rondgang $n - 1$: $\phi = \pi$. Invullen levert:

$$\frac{E_{t,max}}{E_{t,min}} = \frac{\sum_n R^n}{\sum_n (Re^{i\pi})^n} = \frac{1 + R}{1 - R}. \tag{9}$$

c) Resonantie treedt op wanneer geldt $m = \frac{2nd}{\lambda}$ geheel. Voor $\lambda = 500$ nm volgt $m = 12.000$. Rondom resonantie frequentie $\lambda = 500$ nm liggen $500,04$ nm ($m = 11.999$) en $499,96$ nm ($m = 12.001$).

Opgave 6

a) Voor de eerste polarisator hebben we I_0 aan ongepolariseerd licht. Na de eerste polarisator hebben we $I_1 = \frac{1}{2}I_0$ aan lineair gepolariseerd licht (polarisatie met een hoek α met de verticaal). Bij de tweede polarisator wordt de *amplitude* geprojecteerd op de transmissie-as van de tweede polarisator. De hoek waarover wordt geprojecteerd is $\beta - \alpha$. De intensiteit achter de tweede polarisator wordt dan

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2(\beta - \alpha), \tag{10}$$

waarbij $\cos(\beta - \alpha)$ de geprojecteerde amplitude fractie is.

- b) Om volledige transmissie bij de tweede polarisator te krijgen moet de polarisatie over een hoek $\beta - \alpha$ gedraaid worden. Dit kan gedaan worden door een half-lambda-plaat tussen de eerste en de tweede polarisator te zetten. De richting van één van de optische assen van deze kwart-lambda-plaat moet halverwege α en β gericht zijn [dus op een hoek $(\beta + \alpha)/2$].

Opgave 7

- a) Het cruciale padlengteverschil wordt aangegeven door de arcerende lijnen in het grijze gedeelte van de figuur. Het eerste minimum zit bij een specifieke hoek θ_1 waarbij deel A en deel B elkaar uitdoven. Er moet dus een faseverschil van π zijn tussen deel A en deel B. Dit vindt plaats bij

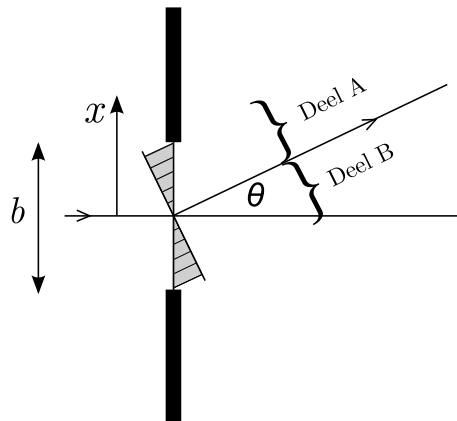
$$\frac{b}{2} \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad (11)$$

ofwel bij

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b}. \quad (12)$$

Dit betekent voor β dat

$$\beta_1 \equiv \frac{1}{2}kb \sin \theta_1 = \frac{1}{2}kb \frac{\lambda}{b} = \pi. \quad (13)$$



- b) Om de intensiteit in richting θ te berekenen moeten we de resulterende veldamplitude van de schuine lijn in de figuur uitrekenen. De bedoelde schuine lijn staat loodrecht op de aangegeven detectierichting. De veldamplitude op de schuine lijn als functie van x is

$$E_{\theta}(x) = E_{\text{in}} e^{-ikx \sin \theta}, \quad (14)$$

waarbij E_{in} de amplitude van het inkomende veld op de verticale lijn is. De fasefactor in bovenstaande vergelijking correspondeert met de lengte van de arcerende lijnen in de figuur. Het resulterende E veld langs de schuine lijn vinden we via integratie

$$I(\theta) \propto \left| \int_{-b/2}^{b/2} E_{\theta}(x) dx \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-b/2}^{b/2} E_{\text{in}} e^{-ikx \sin \theta} dx \right|^2 \\
&= \left| \frac{iE_{\text{in}}}{k \sin \theta} \left(e^{-\frac{1}{2}ikb \sin \theta} - e^{\frac{1}{2}ikb \sin \theta} \right) \right|^2 \\
&= \left| \frac{2E_{\text{in}}}{k \sin \theta} \sin \left(\frac{1}{2}kb \sin \theta \right) \right|^2 \\
&= |E_{\text{in}}|^2 b^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2.
\end{aligned} \tag{15}$$