

Uitwerkingen Tentamen Optica

Datum van het tentamen: 19 februari 2008

Opgave 1

- a) Het hoekoplossend vermogen van een lens (of een holle spiegel) is direct gerelateerd aan het Fraunhofer diffractiepatroon van de contour van de lens (of de holle spiegel). Volgens het Rayleigh criterium kunnen twee vlakke golven die invallen op een circelvormig apertuur onderscheiden worden in het verre veld van de apertuur als de hoek tussen de twee oorspronkelijke voortplantingsrichtingen groter is dan

$$\theta_{\text{diff}} = \frac{1,22\lambda}{D}, \quad (1)$$

waarbij λ de golflengte van het licht is en D de diameter van de apertuur. De holle spiegel in de Hubble telescoop heeft bij een golflengte van 115 nm een hoekoplossend vermogen van $\theta_{\text{min}} = \theta_{\text{diff}} = 58 \times 10^{-9}$ rad.

- b) De grootst mogelijke hoek waaronder twee van Betelgeuze afkomstige lichtstralen de aarde kunnen bereiken is

$$\theta_{\text{Bet}} = \frac{D_{\text{Bet}}}{s_{\text{Bet}}} = \frac{1,11 \times 10^{12} \text{ meter}}{4,04 \times 10^{18} \text{ meter}} = 275 \times 10^{-9} \text{ rad}, \quad (2)$$

waarbij s_{Bet} de afstand tot de aarde is en D_{Bet} de diameter van Betelgeuze. De kleinst detecteerbare hoek van de Hubble telescoop is bijna een factor 5 kleiner dan de hoekspreiding waaronder Betelgeuze ons beschijnt. Daarom zou de Hubble telescoop de diameter van Betelgeuze bepaald kunnen hebben.

Opgave 2

- a) Half-lambda-plaat: E en M. Als het calcietafplaatje in de figuur werkt als een half-lambda-plaat zal de polarisatie van het daarop invallende lineair (verticaal) gepolariseerde licht met 90 graden gedraaid worden. Dit licht zal volledig door de tweede polarisator gaan. Omdat al 50 % van het oorspronkelijk ongepolariseerde licht is tegengehouden door de eerste polarisator is de totale transmissie 50 %. De punten E en M horen bij deze waarde.

Kwart-lambda-plaat: C, G en K. Als het calcietafplaatje in de figuur werkt als een kwart-lambda-plaat zal de polarisatie van het daarop invallende lineair (verticaal) gepolariseerde licht omgezet

worden in circulair gepolariseerd licht. Van dit licht zal alleen de helft door de tweede polarisator gaan. De totale transmissie is in dit geval dus $50\% \times 50\% = 25\%$. De punten C, G en K horen bij deze waarde.

- b) Voor het gemak ontbinden we polarisatie van het licht dat op het calciet valt in een lineaire component langs de “trage as” en een lineaire component langs de “snelle as” van het calciet. Omdat de golflengte van de trage component korter is dan die van de snelle component, zullen de twee componenten een faseverschil oplopen gedurende propagatie. Het faseverschil bij uittreding van het calciet is dan

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L(n_t - n_s)}{\lambda_0}, \quad (3)$$

waarbij L de kristaldikte is, λ de golflengte van het licht in vacuum, n_t de brekingsindex van de trage component en n_s de brekingsindex van de snelle component. Het faseverschil in punt B is gelijk aan het faseverschil in punt J plus 2π , oftewel

$$\Delta\phi_B = \Delta\phi_J + 2\pi. \quad (4)$$

Gebruikmakende van Vergel. (3) vinden we dan de volgende gelijkheid

$$\frac{2\pi L(n_t - n_s)}{\lambda_B} = \frac{2\pi L(n_t - n_s)}{\lambda_J} + 2\pi. \quad (5)$$

Omschrijven levert de dubbele breking van calciet

$$n_t - n_s = \frac{\lambda_J \lambda_B}{L(\lambda_J - \lambda_B)} \approx 0,172. \quad (6)$$

- c) Het spectrum zal vlak zijn met een totale transmissie van 25%. Weer ontbinden we polarisatie van het licht dat op het calciet valt in een lineaire component langs de “trage as” en een lineaire component langs de “snelle as” van het calciet. In deze ontbinding heeft het calciet alleen maar invloed op de fase van de twee componenten en niet op de amplitude. Ongeacht of het calciet werkt als een kwart- of half-lambda-plaat, de amplitude van deze componenten verandert niet. De transmissie as van de tweede polarisator staat evenwijdig aan een optische as van het calciet en selecteert dus alleen *die* polarisatierichting. Omdat de amplitude van die polarisatierichting kleuronafhankelijk is zal het gemeten spectrum vlak zijn. De tweede polarisator absorbeert wel de andere polarisatierichting (die dezelfde amplitude heeft) en samen met het effect van de eerste polarisator zal de totale transmissie op 25% uitkomen.

Opgave 3

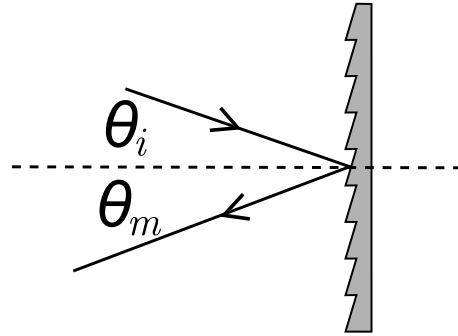
- a) De hoeken van de diffractie ordes (of interferentie ordes) van een tralie kun je berekenen met behulp van

$$\frac{a}{\lambda} (\sin \theta_i - \sin \theta_m) = m, \quad (7)$$

waarbij m het ordegetal is, a de lijnafstand van het tralie, λ de golflengte van het licht en θ_i en θ_m respectievelijk de hoek van inval en de diffractiehoek zijn zoals gedefinieerd in de figuur. Omschrijven levert

$$\theta_m = \arcsin \left(\sin \theta_i - \frac{m\lambda}{a} \right). \quad (8)$$

de lijnafstand is $a = 1\mu\text{m}$ en $\theta_i = 20^\circ$. Voor de getekende diffractieordes vinden we $\theta_{-1} = 70^\circ$, $\theta_0 = 20^\circ$, $\theta_1 = -15^\circ$ en $\theta_2 = -59^\circ$.



- b) De hoeken van de diffractieordes komen dicht bij de hoek van de nulde orde diffractierichting te liggen. De nulde orde diffractierichting ligt nog steeds bij $\theta_0 = 20^\circ$. Doordat de golflengte in water korter is zijn er kleinere hoekverschillen nodig om aan het interferentiecriterium van Vergel. (7) te voldoen.

Opgave 4

- a) Zie de figuur. De gevraagde hoek δ wordt berekend met

$$\delta = \theta_i - \theta_t, \quad (9)$$

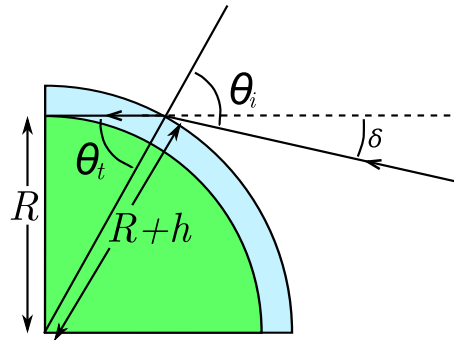
door gebruik te maken van de gelijkheid van overstaande hoeken. Hierbij berekenen we

$$\theta_t = \arcsin \left(\frac{R}{R+h} \right), \quad (10)$$

door gebruik te maken van de aangegeven rechthoekige driehoek in de figuur. Hoek θ_i kan berekend worden volgens

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_t, \quad (11)$$

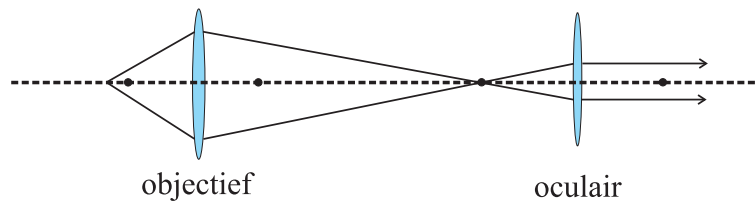
door gebruik te maken van de wet van Snellius en de breking aan de aardatmosfeer. Het combineren van de laatste drie vergelijkingen levert de in de opgave gegeven uitdrukking.



b) Invullen levert $\delta = 0.22^\circ$.

Opgave 5

a) De stralengang in een microscoop ziet er als volgt uit:



De stippen op de as geven de brandpunten aan.

- b) Het beeld dat gevormd wordt achter het objectief is omgedraaid. Dit beeld dient als voorwerp voor het oculair, wat het weer teruggraait. Het uiteindelijke beeld wat je ziet is dus niet omgedraaid.
- c) De numerieke apertuur van het objectief bepaalt in grote mate de resolutie van de microscoop. De hoek θ bepaalt de diffractie limiet, $\theta = 1,22\lambda/D$, en dus het oplossend vermogen dat behaald kan worden.

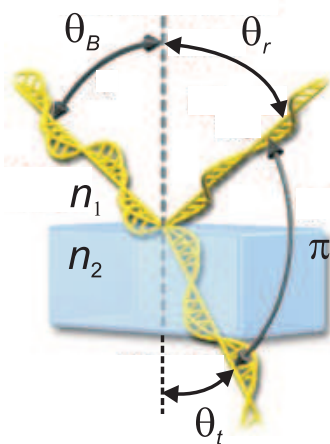
Opgave 6

a) De wet van Snell luidt:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (12)$$

met θ_i en θ_t de hoek van inval resp. transmissie ten opzichte van de normaal; en n_1 en n_2 de brekingsindices van de twee media. Verder geldt altijd dat de invalhoek gelijk is aan de reflectiehoek: $\theta_i = \theta_r$.

De polarisatie component *loodrecht* ten opzichte van het wateroppervlak kan *niet* gereflecteerd worden als de hoek tussen reflectie en transmissie $\pi/2$ bedraagt. Dit gebeurt bij een specifieke invalshoek: de Brewsterhoek $\theta_i = \theta_B$ (zie figuur).



Onder de Brewsterhoek geldt dat $\theta_t = \pi/2 - \theta_i$. Uit de wet van Snel volgt dan:

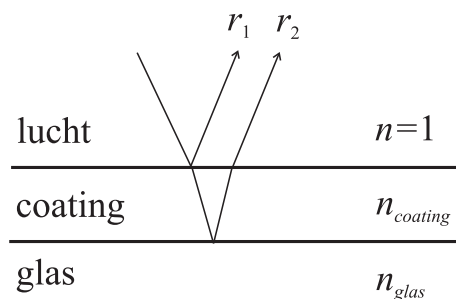
$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}. \quad (13)$$

Met $n_1 = 1$ en $n_2 = 1,33$ volgt $\theta_B \simeq 53^\circ$.

- b) Aangezien de reflecties evenwijdig aan het wateroppervlak - dus horizontaal - gepolariseerd zijn, moet de transmissie as van de polaroid-bril verticaal zijn.

Opgave 7

- a) Het verwijderen van reflecties met behulp van een coating werkt op basis van destructieve interferentie tussen de verschillende reflectie ordes. In de praktijk nemen de opeenvolgende reflectie ordes dusdanig af in intensiteit, dat alleen de directe en eerste indirecte reflectie hoeven worden beschouwd (zie figuur). Om volledige uitdoving te kunnen krijgen, moeten de twee bijdragen wel gelijke amplitude hebben. De grootte van de amplitudes hangt af van de Fresnel reflectie coëfficiënten, en dus van de brekingsindex $n_{coating}$.



- b) r_1 en r_2 gelijk zijn. We kunnen de intensiteiten van de reflecties bepalen met behulp van de Stokes vergelijkingen. We schrijven expliciet:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1-n_{coating}}{1+n_{coating}}, \\ r_2 &= \left[1 - \left(\frac{1-n_{coating}}{1+n_{coating}} \right)^2 \right] \left(\frac{n_{coating}-n_{glas}}{n_{coating}+n_{glas}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

De term $\left[1 - \left(\frac{1-n_{coating}}{1+n_{coating}} \right)^2 \right]$ in de uitdrukking voor R_2 - die komt van twee maal transmissie door het grensvlak lucht-coating - kan benaderd worden op 1. We vinden:

$$\frac{1-n}{1+n} = \frac{n_{coating} - n_{glas}}{n_{coating} + n_{glas}}, \quad (15)$$

en dus $n_{coating} \simeq n_{glas}$.

- c) De fasesprong door toedoen van reflecties bedraagt voor beide paden π en deze vallen dus weg. Destructieve interferentie treedt op als $2n_1d = \frac{\lambda}{2}$, zodat voor de dikte volgt $d = 103$ nm.

Opgave 8

- a) Voor de teruglopende golf schrijven we $\vec{E}_{terug}(z) = -(\hat{x} + i\hat{y})e^{-ikz}$. Er volgt dus dat $\vec{E}_{heen}(z) + \vec{E}_{terug}(z) = 2i(\hat{x} + i\hat{y})\sin kz$. Ofwel, circulair gepolariseerd licht, met een intensiteitsverdeling die harmonisch varieert langs de z -as.
- b) Doordat het licht zowel heen en als terug door het $\lambda/4$ -plaatje gaat, functioneert het effectief als een $\lambda/2$ -plaatje. Dit draait de richting van de circulaire polarisatie van rechtsom naar linksom. Dus: $\vec{E}_{terug}(z) = -(\hat{x} - i\hat{y})e^{-ikz}$. Er volgt $\vec{E}_{heen}(z) + \vec{E}_{terug}(z) = 2i\hat{x}\sin kz + 2i\hat{y}\cos kz$. Dit is een lineaire polarisatie, maar binnen een golflengte langs z , maakt deze lineaire polarisatie twee volledige rotaties.