Tentamen Optica

Uitwerkingen - 17 februari 2009

Cijfer = (totaal aantal punten + 10)/96 (Er zijn totaal 10 bonuspunten te verdienen)

Opgave 1
De waarden in deze opgave zijn gebaseerd op Quickbird, een van de satelieten gebruikt voor google maps.

a) (6p) De resolutie wordt beperkt door diffractie aan de lens. Volgens het Rayleigh criterium zijn twee punten nog onderscheidbaar als ze de grootte van de diffractiespot uit elkaar liggen. De grootte van de spot $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$, met D de diameter van de lens. De afstand x op het aardoppervlak wordt gegeven door $\Delta\theta \approx \tan\Delta\theta = x/s$, waarbij s de hoogte t.o.v. het aardoppervlak. $x \approx s\Delta\theta = 450 \cdot 10^3 1.22 \cdot 10^{-6} = 0.549$ m.

b) (6p) Gebruik dezelfde formule: $x' = s'\Delta\theta \Rightarrow s' = x'/\Delta\theta = x'D/(1.22\lambda) = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5/(1.22 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}) = 5.74$ m.

Enigzins dubieus is: $1/s + 1/s' = 1/f$ met een vergroting $s'/s = 7 \cdot 10^{-6}/0.549 \Rightarrow s' = 1.275 \cdot 10^{-5} s = 5.74$ m. $s' \approx f$ is een goede benadering.

Opgave 2

a) (4p) Invullen van $y = A\cos(kx - \omega t)$ in de differntiaalvergelijking geeft:

$$-Ak^2 \cos(kx - \omega t) = -a/k^2 A\omega^2 \cos(kx - \omega t)$$

$$k^4 = a\omega^2 \Rightarrow \omega = (1/\sqrt{a})k^2$$

N.B. De oplossing met negatieve frequentie vervalt. Dit zou een energieschaal geven waarbij hogere frequenties corresponderen met een lagere energie. Dit is fysisch onjuist.

b) (4p) De dimensies van a zijn gelijk aan de dimensies van k^4/ω^2, dus [$\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^4$].
Een alternatieve route die leidt tot hetzelfde antwoord is dat $a/k^2 = 1/v^2$, waarbij v een snelheid is in m·s^{-1}, k^2 heeft dimensies m^{-2}.

c) (4p) De fasesnelheid $v_{fase} \equiv \omega/k = k/\sqrt{a} = 2\pi/(\lambda\sqrt{a})$.

d) (4p) De groepssnelheid $v_{groep} \equiv \partial\omega/\partial k = 2k/\sqrt{a} = 4\pi/(\lambda\sqrt{a}) = 2v_{fase}$.

Opgave 3

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$\beta = 1/2kb\sin\theta$$

$$\alpha = 1/2ka\sin\theta$$

a) (4p) De minima bij $x = 2.44$ en 4.88 mm worden veroorzaakt door het diffractiepatroon van een enkele spleet.

b) (4p) Tussen de hoofdmaxima van het interferentiepatroon zijn telkens twee nevenmaxima zichtbaar. Het tralie heeft dus 4 spleten.

c) (4p) De breedte van de spleten kan men halen uit het eerste nulpunt van het diffractiepatroon van een enkele spleet. Dit nulpunt ligt by $\sin\theta = \lambda/b$. $\sin\theta \approx \tan\theta = 2.44/500$, dus $b = 488 \times 10^{-9} \times 500/2.44 = 10^{-4}$ m ($100\ \mu$m).

d) (4p) De afstand tussen de spleten volgt uit de afstand tussen de hoofdmaxima van het interferentiepatroon. Het eerste ($m = 1$) maximum ligt by $\sin\theta = \lambda/a$. Omdat het $m = 3$ maximum van het interferentiepatroon van de tralie samenvalt met het eerste minimum van het diffractie patroon van een enkele spleet weten we dat $\sin\theta \approx \tan\theta = (1/3)(2.44/500)$, dus $a = 3b = 3 \times 10^{-4}$ m ($300\ \mu$m).

Opgave 4

a) (3p) Op $t = 4k + 2$ seconden met $k \in N$

b) (4p) Na een halve seconde is de hoek tussen de transmissie assen van de eerste twee polarisatoren gelijk aan $\pi/8$. Zo ook de hoek tussen de tweede en derde polarisator. Als we het veld na de eerste polarisator gelijk nemen aan E_0, dan is het veld na de derde polarisator gelijk aan $E_0 \cos^2 \pi/8 = 0.853E_0$. Na de eerste polarisator wordt de helft van de intensiteit doorgelaten. Na de derde polarisator geldt dus $I = 0.5I_0 \cos^4 \pi/8 = 0.364I_0$.

c) (3p) Het $\lambda/2$-plaatje draait de polarisatie over een hoek gelijk aan tweemaal de tussen de snelle of langzame as en de inkomende polarisatie. Er wordt geen licht doorgelaten als na het $\lambda/2$ plaatje de polarisatie over $\pm 90°$ is gedraaid. Dit gebeurt op $t = 2k + 1$ seconden met $k \in N$

d) (3p) Na een halve seconde staat het $\lambda/2$-plaatje onder $22.5°$ met de inkomende polarisatie. De polarisatie wordt dus $45°$ gedraaid. De fractie die de laatste polarisator van dit opvallende licht doorlaat is $\cos^2 \pi/4 = 0.5$. De eerste polarisator liet de helft van het invallende licht door. Bij elkaar is de doorgelaten intensiteit $I = 0.25I_0$.

e) (3p) Nooit. Een $\lambda/4$ laat alleen linear gepolariseerd licht door als de polarizatie parellel is aan de snelle of langzame as. In dit geval is de polarisatie ongewijzigd en is er dus transmissie. Als de hoek met de langzame (of snelle) as exact 45° is, dan is het licht circulair gepolariseerd. De transmissie door een lineare polarisator is dan 50%. Voor alle tussenliggende gevallen is het licht elliptisch gepolariseerd en is de transmissie altijd ongelijk nul.

Opgave 5

a) (4p) De vergroting $M = s/s' = 3 \Rightarrow s = 3s'$ is gegeven. Er geldt $1/f = 1/s + 1/s' = 1/s' + 1/3s' \Rightarrow s' = 4/3f$. De afstand tot de muur is gelijk aan $s + s' = 4s' = 16/3f = 3.2$ m.

b) (2p) De televisie moet op zijn kop staan, want het beeld draait om voor een reëel beeld met een positieve lens.

c) (2p BONUS) Met een grotere lens vang je meer licht op en wordt het beeld helderder.
N.B. De sferische abberaties worden erger voor een grotere lens, want de hoeken worden groter.

Opgave 6

De reflectie van lucht ($n = 1$) naar olie ($n = 1.47$) en van olie ($n = 1.47$) naar glas ($n = 1.51$) zijn beiden van lage index naar hoge index. De fasesprong is dus gelijk voor beide gevallen. De interferentie wordt veroorzaakt door een verschil in optische weglengte $\Delta s(r) = 2nd(r)$.

a) (4p) Constructieve interferentie in reflectie treedt op als $\Delta s = m\lambda$. $\Delta s = 2nd_0 = m\lambda \Rightarrow m = 2nd_0/\lambda = 2 \cdot 2000 \cdot 1.47/589.3 = 9.97$. De buitenste $m = 0$ ring is helder (er is geen π faseverschil!) en er zijn dus 10 heldere ringen zichtbaar. Het midden van de vlek is ook helder.

b) (4p) Destructieve interferentie in reflectie treedt op als $\Delta s = (m' + 1/2)\lambda$. De grootste ring heeft $m' = 1$.

$$2nd_0(1 - r^2/r_0^2) = \lambda/2 \Rightarrow r^2 = \frac{r_0^2}{2nd_0}(2nd_0 - \lambda/2)$$

$$r = \sqrt{\frac{0.1^2}{2 \cdot 1.47 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}(2 \cdot 1.47 \cdot 2 \cdot 10^{-6} - 0.5 \cdot 0.5893 \cdot 10^{-6})} = 0.0975 \text{ m } (9.75 \text{ mm}).$$

c) (2p BONUS) De interferentie verdwijnt omdat het witte licht een eindige coherentie lengte heeft.

d) (6p BONUS) Het patroon vervaagt als de optische weglengte gelijk is aan de helft van de coherentie lengte. De coherentie lengte $\Delta x_c = c\Delta t_c = c/\Delta\nu$. De bandbreedte $\Delta\nu = c/\lambda_1 - c/\lambda_2 = c(\lambda_2 - \lambda_1)/(\lambda_1\lambda_2)$. $\Delta x_c = (\lambda_1\lambda_2)/(\lambda_2 - \lambda_1) = 0.45 \cdot 0.65/0.2 = 1.46\mu$m. De dikte d wordt gegeven door $2nd = 1/2\Delta x_c$, d is dan gelijk aan $\Delta x_c/4n = 1.46/4 \cdot 1.47 = 0.249\mu$m.

Opgave 7

a) (4p) We gebruiken de formule voor breking aan een boloppervlak.

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

met $n_2 = 1.60$, $s' = 12.0$ cm en $R = 3.00$ cm. $1/s = (1.60-1.00)/3.00-1.60/12.0 \Rightarrow s = +15$ cm. Het beeld licht dus 15 cm vanaf het uiteinde van de staaf.

b) (4p) De afstand s is positief, dus het gaat om een reëel beeld.

c) (4p) Dit is een reëele afbeelding. Gebruik weer

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Leftrightarrow$$

$$n_1 = \left(\frac{n_2}{R} - \frac{n_2}{s'}\right) / \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R}\right)$$

met $s = 90$ cm, $s' = 160$ cm, $R = 3$ cm en $n_2 = 1.60$. $n_1 = 1.6(163/160)(90/93) = 1.52$