

Het cijfer achter iedere vraag geeft aan hoeveel punten te behalen zijn met het goed beantwoorden van de vraag (totaal 100 punten).

Maak gebruik van het blad met gegevens!

1. Het waterstofatoom.

De eigentoestanden van het waterstofatoom worden gekenmerkt door de drie quantumgetallen n , l en m .

- Naar welke fysische observabelen verwijzen deze quantumgetallen? (5)
- Wat is een essentieel verschil tussen toestanden met $l = 0$ en $l \neq 0$. (5)
- Laat zien wat de mogelijke waarden van m zijn voor $n = 2$. (5)
- Is de ionisatie-energie van het He^+ -ion groter of kleiner dan die van waterstof en waarom? (5)
Het emissiespectrum van waterstof bestaat uit reeksen van lijnen die corresponderen met de overgang van het elektron naar een gemeenschappelijk eindniveau. Voor de Lyman reeks is dat het niveau $n = 1$, voor de Paschen reeks het niveau $n = 3$. De eerste lijn van de Lyman reeks ligt bij 121.6 nm.
- Bereken de golflengtes die corresponderen met de eerste lijn van de Paschen reeks en met de limiet van de Paschen reeks. (5)
- In welk deel van het elektromagnetisch spectrum ligt de Paschen reeks? (4)

2. Bekijk een quantummechanisch deeltje met massa m onder invloed van de ééndimensionale potentiaal

$$V(x) = -4\varepsilon \left\{ \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} \right\}$$

voor $x > 0$, de zogenaamde Lennard-Jones potentiaal. In deze uitdrukking is ε een positieve constante met dimensie energie en σ een positieve constante met dimensie lengte.

- Bereken x_0 , de waarde van x (in termen van σ) waarvoor $V(x)$ minimaal is. (4)
- Bereken $V(x_0)$. (4)
- Teken $V(x)$. (4)

In de grondtoestand bevindt het deeltje zich in de buurt van het minimum $x = x_0$.

- Laat zien dat de potentiaal in de buurt van x_0 in benadering te schrijven is als $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2$. Druk daarbij de parameter ω uit in termen van m , ε en σ . (4)
- Wat is voor de potentiaal in (d) de energie van het deeltje in de grondtoestand? (5)
- Bereken de verwachtingswaarde van $(x-x_0)^2$ in de grondtoestand. (5)
- Wat is de verwachtingswaarde van de potentiële energie van het deeltje in de grondtoestand? (5)

3. Bekijk het impulsmoment $\vec{L}=(L_x, L_y, L_z)$.
- Laat zien dat \widehat{L}^2 commuteert met een component van \widehat{L} . (5)
 - Wat betekent het resultaat onder (a) voor de eigentoestanden van \widehat{L}^2 ? (5)
 - Stel φ is een eigentoestand van \widehat{L}_x en van \widehat{L}^2 . Is φ ook een eigentoestand van \widehat{L}_z ?
Beargumenteer kort uw antwoord. (5)
 - Stel wij meten voor L_x in de toestand φ de waarde $2\hbar$. Wat zijn de mogelijke meetwaarden van L_y en L_z in de toestand φ ? (5)

4. Bekijk twee spin $\frac{1}{2}$ deeltjes in onderlinge wisselwerking. De Hamilton-operator kan geschreven worden als

$$\widehat{H}=K\widehat{S}^{(1)}\cdot\widehat{S}^{(2)}$$

waarin de constante K evenredig is met de grootte van de wisselwerking van de spinimpulsmomenten $\vec{S}^{(1)}$ en $\vec{S}^{(2)}$ van de deeltjes 1 en 2.

Laat $\chi_+^{(1)}$ en $\chi_-^{(1)}$ de eigentoestanden van \widehat{S}_z en \widehat{S}^2 van deeltje 1 representeren, en $\chi_+^{(2)}$ en $\chi_-^{(2)}$ de eigentoestanden van \widehat{S}_z en \widehat{S}^2 van deeltje 2.

- a. Laat zien dat

$$\widehat{S}^{(1)}\cdot\widehat{S}^{(2)}=\frac{1}{2}\{\widehat{S}_+^{(1)}\widehat{S}_-^{(2)}+\widehat{S}_-^{(1)}\widehat{S}_+^{(2)}\}+\widehat{S}_z^{(1)}\widehat{S}_z^{(2)}. \quad (5)$$

- b. Bereken de verwachtingswaarde van \widehat{H} in de producttoestand $\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}$. (5)

De matrixrepresentatie van \widehat{H} in de basis van de vier producttoestanden $\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$, $\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}$, $\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}$ en $\chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)}$ wordt gegeven door

$$\frac{1}{4}K\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bepaal de eigenwaarden en eigentoestanden van \widehat{H} . (5)
- Stel het systeem van 2 spins bevindt zich in de toestand $\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}$. Laat zien wat de kans is dat wij bij meting van de spincomponent $S_z^{(1)}$ de waarde $\frac{1}{2}\hbar$ vinden. (5)

Gegevens QM 1

23 januari 2017

Waterstofatoom

$$E_n = \frac{1}{n^2} E_1$$

Harmonische oscillator

$$\hat{a}_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(\mp i \hat{p}_x + m\omega \hat{x} \right)$$

$$\hat{a}_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}$$

$$\hat{a}_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

Impulsmoment

$$\hat{S}_{\pm} \equiv \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y$$

$$\hat{S}_{\pm} |s m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} \hbar |s m_s \pm 1\rangle$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$