

1. De toestandsfuncties voor de gebonden toestanden van het waterstofatoom kunnen worden geschreven als

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi).$$

De functie $R(r)$ is een oplossing van de radiële vergelijking

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u(r) = E u(r) \quad (1)$$

waarin $u(r) \equiv rR(r)$.

- Licht de vorm van de effectieve potentiaal kort toe en teken deze voor $l = 0$ en $l \neq 0$ in één figuur.
- Oplossing van vergelijking (1) voor $E < 0$ laat zien dat de energie gequantiseerd is.
Teken het energieniveauschema en beschrijf aan de hand daarvan kort het spectrum van waterstof.
- Geef de mogelijke waarden van de quantumgetallen n , l en m en de ontardingsgraad van ieder energieniveau.
- Bereken de verwachtingswaarde van r^n in de grondtoestand van het waterstofatoom (in termen van de Bohr straal).
- De toestandsfunctie $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ is GEEN eigenfunctie van \hat{L}_x . Laat dat zien.

2. Stel een spin $\frac{1}{2}$ deeltje bevindt zich in de toestand

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix},$$

waarbij de spinor uitgedrukt is in de basis van eigenspinoren van \hat{S}_z .

- Wat is de waarschijnlijkheid dat bij meting van S_z de waarde $\frac{\hbar}{2}$ wordt gevonden?
- Bereken de verwachtingswaarde van S_x in de toestand χ .

Bekijk nu een spin $\frac{1}{2}$ deeltje in het magneetveld $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$.

Aan het spinimpulsmoment \vec{S} is een magnetisch moment $\mu = \gamma \vec{S}$ gekoppeld (γ de gyromagnetische verhouding).

- Bepaal voor deze situatie de matrixrepresentatie van de Hamilton-operator in de basis van eigenspinoren van \hat{S}_z .
- Bereken de mogelijke meetuitkomsten als de energie van dit deeltje wordt gemeten. Licht uw antwoord kort toe.

3. Beschouw het helium atoom in de grondtoestand, de $(1s)^2$ configuratie.
 - a. Geef de spinor voor dit twee-electron systeem in termen van de eigenspinoren van \hat{S}_z voor de afzonderlijke electronen.
 - b. Geef de toestandsfunctie (baan en spin) voor de grondtoestand van helium in de vorm van een Slaterdeterminant.

4. Beschouw een twee-dimensionale isotrope harmonische oscillator waarvoor de Hamiltoniaan gegeven is door

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$$

- a. Schrijf de Hamilton-operator \hat{H} in termen van de ladderoperatoren $\hat{a}_+^{(x)}$, $\hat{a}_-^{(x)}$, $\hat{a}_+^{(y)}$ en $\hat{a}_-^{(y)}$ (zie blad met gegevens).
- b. Doe hetzelfde voor de impulsmomentoperator \hat{L}_z .
- c. Laat zien dat \hat{L}_z commuteert met \hat{H} .
- d. Beschouw de toestandsvectoren $|01\rangle$ en $|10\rangle$ waarin de getallen verwijzen naar de quantumgetallen corresponderende met de eigentoestanden van \hat{H} . Laat zien of deze toestandsvectoren eigenvectoren zijn van \hat{L}_z .
- e. Becommentarieer uw antwoord op vraag (d) in het licht van het resultaat onder (c).